# Ein-Schleifen-Vielteilchen-Amplituden im supersymmetrischen Wess-Zumino-Modell

Diplomarbeit
von
Thomas Reiter

vorgelegt bei

Professor Dr. R. Rückl

am

Institut für Theoretische Physik und Astrophysik
der
Bayerischen Julius-Maximilians-Universität
Würzburg

3. August 2005

# Inhaltsverzeichnis


**1 Einleitung** **1**

**2 Das Wess-Zumino-Modell** **7**

2.1 Supersymmetrie . . . 7

2.1.1 Die Supersymmetrie-Algebra . . . 7

2.1.2 Superraum und Superfelder . . . 11

2.1.3 Das chirale Superfeld . . . 13

2.2 Die Lagrange-Dichte des Wess-Zumino-Modells . . . 15

2.2.1 Herleitung mit Weyl-Spinoren . . . 15

2.2.2 Formulierung mit Majorana-Spinoren . . . 17

2.3 Feynman-Regeln . . . 18

**3 Zugrundeliegende Rechenmethoden** **22**

3.1 Notationen, Konventionen und Mandelstam-Variablen . . . 22

3.2 Auswertung von skalaren $n$-Punkt-Integralen . . . 24

3.2.1 Konventionen und Schreibweisen . . . 24

3.2.2 Feynman-Parametrisierung . . . 26

3.2.3 Wick-Rotation . . . 26

3.2.4 Integration in Polarkoordinaten in $d$ Dimensionen . . . 27

3.2.5 Divergente Anteile der Integrale $I_n^d$ . . . 29

3.3 Reduktion der Tensorintegrale . . . 30

3.3.1 Überblick über Methoden der Tensorreduktion . . . 30

3.3.2 Berechnung von $I_2^{d,\mu}$ . . . 30

3.3.3 Berechnung von $I_3^{d,\mu}$ . . . 31

3.4 Separation von IR-Polen in masselosen $n$-Punkt-Integralen . . . 32

3.4.1 Bestimmung des infraroten Divergenzverhaltens . . . 32

3.4.2 Herleitung der Reduktionsformeln für Skalarintegrale . . . 33

3.4.3 Anwendung der Reduktionsformeln . . . 37

**4 Renormierung** **38**

4.1 Das Nicht-Renormierungs-Theorem . . . 38

4.2 Einschleifen-Renormierung des masselosen Wess-Zumino-Modells . . . 40

4.2.1 Korrekturen der Propagatoren . . . 40

4.2.2 Korrekturen der Dreipunktfunktionen . . . 43

4.2.3 Bestimmung der Renormierungskonstanten . . . 43

**5 Vielteilchenamplituden im masselosen Wess-Zumino-Modell 49**
5.1 Die Vierskalaramplitude . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49
5.1.1 Die Struktur der Amplitude . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49
5.1.2 Berechnung der Beiträge . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52
5.1.3 Die Gesamtamplitude . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 55
5.1.4 Weitere Vierteilchenamplituden . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56
5.2 Die Sechsskalaramplitude . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58
5.2.1 Die Struktur der Amplitude . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58
5.2.2 Der Boxbeitrag . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63
5.2.3 Der Hexagonbeitrag . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 65
5.2.4 Sonstige Beiträge . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 74
5.2.5 Die Gesamtamplitude . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 75

**6 Supersymmetrische Ward-Identitäten 78**
6.1 Supersymmetrietransformationen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 78
6.2 Herleitung der Ward-Identitäten . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 79
6.3 Anwendung auf die Vierteilchenamplituden . . . . . . . . . . . . . . . . 80

**7 Ergebnisse und Ausblick 83**

**8 Anhang 86**
8.1 Konventionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 86
8.1.1 Darstellung der Pauli- und Dirac-Matrizen . . . . . . . . . . . . . 86
8.1.2 Symmetrische Gruppen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 87
8.2 Wichtige Formeln und Identitäten . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 88
8.2.1 Identitäten für Dirac-Matrizen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 88
8.2.2 Identitäten für Weyl-Spinoren . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 88
8.2.3 Vollständige Reduktion von skalaren Integralen . . . . . . . . . . . 89
8.3 Hinweise zu `FORM` . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 92
8.3.1 Darstellung in `FORM` . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 92
8.3.2 Beispiele rund um die Mandelstam-Variablen . . . . . . . . . . . . 93
8.3.3 Summation über Permutationen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 102
8.3.4 Die Passarino-Veltman-Methode . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 105

# 1 Einleitung

Die Frage nach den elementaren Bausteinen der Natur bewegt die Menschen schon seit Jahrhunderten. Waren diese Fragen anfangs rein philosophischer Natur, so stellte sie die Physik mit der Behandlung durch Quantenfeldtheorien auf eine fundierte, mathematische Basis. Als Begründer der Ansicht, dass die Welt aus unteilbaren, kleinsten Bausteinen besteht, gilt heute der Vorsokratiker und Naturphilosoph Demokrit von Abdera (460–371 v.Chr.), der diese Urbausteine der Materie *Atome*[1] nannte. Der Übergang von dieser philosophischen und metaphysischen Weltbetrachtung hin zu einer Wissenschaft im modernen Sinne dauerte knapp zweitausend Jahre.

Im 16. Jahrhundert legte Francis Bacon (1561–1626) die philosophischen Grundlagen für die systematische Naturbeobachtung, gegründet auf der Forderung, die Naturgesetze durch mathematische Modelle zu beschreiben und durch Experimente zu belegen. Galileo Galilei (1564–1642) und Sir Isaac Newton (1643–1727) waren die ersten bedeutenden Physiker, die Bacons Methodik umsetzten und wurden damit zu den Begründern der modernen Physik.

Damit veränderte sich auch die Arbeitsweise in der Suche nach den Elementarteilchen. Sah man bis in das 19. Jahrhundert die Atome noch als unteilbar an, so gab ihnen 1897 Joseph J. Thomson durch die Entdeckung des Elektrons eine erste Struktur. Den experimentellen Beweis für die Struktur der Atome erbrachte Ernest Rutherford 1906 mit seinen Streuexperimenten. Seine Ergebnisse zeigten, dass die Masse des Atoms auf einen sehr kleinen Kern konzentriert ist, der von einer Elektronenhülle umgeben ist.

Zur Wende zwischen 19. und 20. Jahrhundert deuteten die Entdeckungen erstmals darauf hin, dass eine Beschreibung der Physik durch die Newton'sche Mechanik und die klassische Elektrodynamik den Experimenten nicht gerecht wird. Der Photoeffekt, obwohl er schon 1886 von Heinrich Hertz beobachtet wurde, konnte zum Beispiel erst 1905 von Albert Einstein durch das Postulat von Lichtquanten erklärt werden, das Bohr'sche Atommodell erforderte nicht-kontinuierliche Bewegungsgesetze und schränkte dadurch die Gültigkeit der klassischen Mechanik ein. Die korrekte Beschreibung der Quantennatur subatomarer Prozesse gelang ab 1925 durch die Entwicklung der Quantenmechanik, die von Erwin Schrödinger und Werner Heisenberg zunächst unabhängig voneinander vorangetrieben wurde. Paul Dirac verknüpfte im Jahr 1927 Einsteins spezielle Relativitätstheorie mit der Quantenmechanik und gelangte dadurch zur Vorhersage der Existenz des bis dahin unbeobachteten Antiteilchens des Elektrons, das bereits 1932 von Carl D. Anderson in der Höhenstrahlung nachgewiesen werden konnte.

Mit dem Bau des ersten Zyklotrons leitete Ernest O. Lawrence 1929 eine neue Ära

[1] griech. $\acute{\alpha}\tau o\mu o$: unteilbar

der Teilchenphysik ein. Zahlreiche weitere und erheblich leistungsfähigere Beschleunigerexperimente trugen zum Verständnis der Teilchenphysik erheblich bei, begleitet wiederum durch eine erfolgreiche Entwicklung der theoretischen Teilchenphysik. Zur heute gebräuchlichen Beschreibung und störungstheoretischen Behandlung der Teilchenphysik durch Quantenfeldtheorien trugen maßgeblich die Arbeiten von Richard Feynman (1918–1988) bei, dessen Idee der Feynman-Diagramme nach wie vor eines der wichtigsten Werkzeuge der Teilchenphysik ist.[2]

Das Standardmodell der elektro-schwachen [GW77] und starken [GW73] Wechselwirkung wurde in den siebziger Jahren entwickelt und etablierte sich zu einer einheitlichen Beschreibung der Daten aus den existierenden Beschleunigerexperimenten. Die große Vorhersagekraft des Standardmodells resultiert aus der Möglichkeit, Prozesse störungstheoretisch zu beschreiben und im Prinzip beliebig genaue Präzisionsrechnungen durchzuführen. Die Grundlage für diese Präzisionsvorhersagen ist die Renormierbarkeit des Standardmodells [tHV72], die es ermöglicht, alle durch Schleifenkorrekturen induzierten Divergenzen mit Hilfe einer Redefinition der Parameter des Modells aus konkreten Rechnungen zu entfernen. Die Renormierung erlaubt es, die Parameter des Modells eindeutig aus Observablen zu bestimmen und darauf aufbauend Vorhersagen für Experimente zu gewinnen.

Das Standardmodell ist heute in allen Punkten, bis auf die Existenz des Higgs-Teilchens experimentell bestätigt. Über mehrere Jahrzehnte hinweg ist das Standardmodell bis heute die Grundlage für die Beschreibung der Teilchenphysik und liefert erfolgreich Vorhersagen für Beschleunigerexperimente.

Eine direkte Suche nach letzten fehlenden Teilchen des Standardmodells, dem Higgs-Boson, am Beschleuniger LEP II am CERN konnte den Massenbereich unterhalb von 114 GeV ausschließen [Group04]; Präzisionsmessungen von verschiedenen Beschleunigern liefern eine obere Schranke für die Higg-Masse von $m_H \lesssim 250\,\text{GeV}$. Die jüngsten Ergebnisse aus der Störungsrechnung in höheren Ordnungen [FAC05] favorisieren einen Erwartungswert für die Higgs-Masse bei 168 GeV.

Der Bau des ‚Large Hadron Colliders‘ (LHC), des Nachfolgeexperiments von LEP II ist nicht ausschließlich durch die Suche nach dem Higgs-Boson motiviert. Die bekannten Massengrenzen für das Higgs-Boson stellen zwar sicher, dass dieses am LHC entdeckt wird und dessen Masse bestimmt werden kann, jedoch nur sofern es existiert. Doch auch für den Fall eines Standardmodells ohne Higgs-Teilchen wird mit großer Wahrscheinlichkeit neue Physik am LHC entdeckt. Hinweise darauf liefert bereits das Standardmodell selbst, denn ein Standardmodell ohne Higgs würde zu einer Unitaritätsverletzung bereits bei LHC-Energien führen, welche nur durch das Einsetzen von neuer Physik jenseits des Standardmodells verhindert werden könnte. Diese Effekte neuer Physik wären also am LHC messbar [Vel].

Nicht nur theoretische Überlegungen schüren die Erwartungen, neue Physik am LHC zu entdecken, in den vergangenen zehn Jahren häuften sich auch experimentelle Belege für Phänomene, die aus dem Standardmodell nicht oder nur unzureichend erklärt werden können. So wurde z. B. im Super-Kamiokande-Experiment nachgewiesen, dass die

[2] [Wik05]

Neutrinogenerationen mischen, also eine nicht-verschwindende Masse besitzen [A+05]. Ein weiteres Beispiel für experimentelle Hinweise auf Physik jenseits des Standardmodells ist das WMAP[3]-Experiment. Durch die Messung der Anisotropie des kosmischen Mikrowellenhintergrundes konnte der relative Anteil der sogenannten dunklen Materie an der Gesamtenergiedichte sehr genau bestimmt werden [WMAP03], und es konnte gezeigt werden, dass die uns bekannte baryonische Materie den weit geringeren Anteil an der gesamten Materie des Universums einnimmt.

Eine mögliche Erweiterung des Standardmodells, die auch Kandidaten für die dunkle Materie beinhaltet, ist die Supersymmetrie. Sollte diese Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen realisiert sein, dann favorisieren die derzeitigen astronomischen Experimente, dass die Masse des leichtesten supersymmetrischen Teilchens (LSP) in einem Energiebereich liegt, der auch dem LHC zugänglich ist [EOSS03][EM05].

Da jedoch noch keine experimentelle Evidenz für Supersymmetrie gefunden wurde, ist diese Erweiterung des Standardmodells haupsächlich durch theoretische Überlegungen motiviert. Die ursprünglichen Motivation der Supersymmetrie, waren die Anstrengungen, eine Vereinheitlichung der Raumzeitsymmetrie mit den inneren Symmetrien der Teilchenphysik zu finden. Coleman und Mandula zeigten jedoch [CM67], dass bereits wenige Annahmen über die $S$-Matrix und die Einteilchenzustände eines Modells dazu führen, dass als einzig mögliche Vereinigung von inneren Symmetriegruppen $B$ mit der Lorentzgruppe $P$ die triviale Vereinigung $G \supseteq B \otimes P$ in Frage kommt. Will man keine der im Beweis geforderten Voraussetzungen fallen lassen, so bleibt als einziger Ausweg eine Änderung der den Symmetriegruppen zu Grunde liegenden Algebra: Anstatt der Vertauschungsrelationen, die durch Lie-Algebren beschrieben werden, kann man auf sogenannte Antivertauschungs- oder fermionische Vertauschungsregeln ausweichen. Die Einführung dieser neuen Art der Symmetrie hat, im Falle ihrer Realisierung durch die Natur, weitreichende Auswirkungen auf die Physik. Zunächst führt eine supersymmetrische Theorie stets zu einem Teilchenspektrum, das zu jedem Teilchen ein supersymmetrisches Partnerteilchen enthält, dessen Spin sich um 1/2 vom Ausgangsteilchen unterscheidet, während die Massen und inneren Quantenzahlen von Teilchen und Partnerteilchen identisch sind. Für das Elektron hieße dies z. B., dass ein skalares, elektrisch geladenes Teilchen mit der Masse eines Elektrons existieren müsste, was allerdings nie beobachtet wurde. Dieser Widerspruch zum Experiment bedeutet nicht den grundsätzlichen Ausschluss der Supersymmetrie, vielmehr könnte sie in Form einer gebrochenen Symmetrie realisiert sein, und die Masse des skalaren Elektrons aufgrund der Supersymmetriebrechung so weit nach oben verschoben sein, dass eine Beobachtung nur an den bisher verfügbaren Beschleunigerenergien scheitert.

Eine weitere Motivationen für ein supersymmetrisch erweitertes Standardmodell ist das verbesserte Renormierungsverhalten supersymmetrischer Theorien. Im Falle einer exakten, also ungebrochenen Supersymmetrie heben sich quadratische Divergenzen zwischen Teilchen und deren supersymmetrischen Partnerteilchen in Schleifenkorrekturen immer auf [Ell95], so dass maximal logarithmische Divergenzen verbleiben. Dieser Umstand löst das sogenannte Natürlichkeitsproblem des elementaren Higgs-Bosons. Das

[3] ‚Wilkinson Microwave Anisotropy Probe'

Natürlichkeits-‚Problem' ist kein eigentliches Problem, sondern eher eine Frage der Ästhetik und impliziert die Forderung, dass Beiträge zur Masse eines Teilchens durch Schleifenkorrekturen maximal in der Größenordnung der Masse selbst sein sollten. Auch in einem Modell mit gebrochener Supersymmetrie bleibt das verbesserte Renormierungsverhalten teilweise bestehen, und man erhält quadratische Korrekturen zur Higgs-Masse $m_H$ [Ell95],

$$\delta m_H^2 \approx \mathcal{O}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)\left|m_B^2 - m_F^2\right|, \tag{1.1}$$

die nur von den Massen der fermionischen ($m_F$) und bosonischen ($m_B$) Partnerteilchen eines Multipletts abhängen[4]. Dieser Korrekturterm ist jedoch hinreichend klein, wenn

$$\left|m_B^2 - m_F^2\right| \lesssim 1\,\mathrm{TeV}^2 \tag{1.2}$$

ist. Das Natürlichkeitsproblem liefert so ein Argument dafür, dass im Falle eines supersymmetrischen Teilchenspektrums die bisher unentdeckten Partnerteilchen im Bereich von einem TeV gefunden werden könnten.

Einen weiteren Hinweis auf eine mögliche Realisierung von Supersymmetrie gibt das Verhalten der Kopplungskonstanten bei großen Energieskalen. Im Standardmodell ist ohne Hinzunahme neuer Physik keine große Vereinheitlichung möglich, das heißt, es gibt keinen Punkt, wo die drei fundamentalen Kopplungen gleich groß werden. Die Hinzunahme von Supersymmetrie liefert einen solchen Punkt im Bereich von $10^{16}$ GeV in einem minimalen, supersymmetrischen $SU(5)$-Modell [AdBF91].

Doch auch ohne ihre Realisierung in der Natur ist ein Studium der Supersymmetrie sinnvoll. Die Berechnung vieler QCD-Amplituden lässt sich nämlich dadurch vereinfachen, dass man die QCD in eine effektive supersymmetrische Theorie einbetten kann [PT85][Dix95][Dix96]. Durch diesen Trick kann man Amplituden mit externen Gluonen durch supersymmetrische Ward-Identitäten (SWI)[Reu02] mit Amplituden, die externe Partnerteilchen des supersymmetrischen Multipletts enthalten, in Beziehung setzen. Die Berechnung von QCD-Amplituden kann so durch die Berechnung einfacherer Amplituden teilweise ersetzt werden [BDP05]. Dies ist nur eine von vielen Techniken, deren Zusammenspiel es erlaubt, bei QCD-Amplituden die nötige Präzision zu erreichen, um die Entdeckung neuer Physik am LHC zu ermöglichen.

Um die von den Beschleunigerdaten erreichte Genauigkeit auch auf theoretischer Seite zu erreichen müssen Vorhersagen für die Wirkungsquerschnitte mit NLO-Korrekturen[5] getroffen werden [ATD]. Als einfaches Beispiel für die Notwendigkeit der Berechnung von Korrekturen höherer Ordnung sei hier das Verzweigungsverhältnis

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} \tag{1.3}$$

betrachtet werden. Die starke Skalenabhängigkeit der Kopplungskonstante der starken Kraft $\alpha_s(\mu)$, wobei $\mu$ die sogenannte Renormierungsskala ist, spiegelt sich auch in der

[4] $\alpha = g^2/2\pi$, wobei $g$ die entsprechende Kopplungskonstante ist
[5] next to leading order

Größe $R$ wieder [ESW96]. Um verlässliche Vorhersagen zu machen sollte jedoch die Skalenabhängigkeit möglichst vollständig verschwinden. Dies gelingt aber gerade durch die Hinzunahme von Korrekturbeiträgen höherer Ordnung [ESW96, S. 53–62]. Da am LHC Protonen zur Kollision gebracht werden, sind dort QCD-Amplituden von besonderer Bedeutung. Im Gegensatz zum eben genannten Beispiel sind am LHC nicht nur die Endzüstände, sondern auch die Anfangszustände hadronisch. Umso stärker ist also der Einfluss der skalenabhängigen Kopplungskonstante $\alpha_s(\mu)$, was gleichzeitig die Notwendigkeit von Korrekturen höherer Ordnung steigert.

Desweiteren werden am LHC auch Vielteilchenereignisse eine wichtige Rolle spielen [DKP02]. Deren Berechnung auf Schleifenniveau erfordert Methoden, die bereits vor der numerischen Integration möglichst starke algebraische Vereinfachungen beinhalten. Eine numerische Integration der analytischen Ergebnisse tritt nämlich in phänomenologischen Anwendungen immer auf, da zum Vergleich mit den Detektordaten über gewisse Phasenraumbereiche unter Berücksichtigung experimenteller Schnitte integriert werden muss. Dabei können komplizierte Ausdrücke schnell zu numerischen Instabilitäten führen, die umgangen werden können, wenn bereits der analytische Ausdruck auf eine möglichst kompakte und einfache Form gebracht wird. Hier spielen Reduktionsalgorithmen [BGHS01] eine zentrale Rolle, die es ermöglichen, die in den Amplituden auftauchenden Impulsraumintegrale auf wenige, einfache und bekannte Integrale zurückzuführen und vor allem, integrable Pole der Amplituden zu separieren, um diese bei einer numerischen Integration gesondert behandeln zu können [BGH$^+$05].

Aufgrund sowohl der Anzahl der in QCD-Prozessen beteiligten Diagramme als auch der sehr großen entstehenden Ausdrücke ist es unabdingbar, die Berechnung der Amplituden zu automatisieren und Hilfsmittel zur Verfügung zu stellen, die Ergebnisse zu validieren. Ein unverzichtbares Hilfsmittel stellen hier Computer-Algebra-Anwendungen dar, die meist durch spezielle Softwarekomponenten, wie z. B. Diagrammgeneratoren, ergänzt werden.

Diese Arbeit richtet sich vor allem an zwei Kernpunkten aus: Neben dem Erlernen von Techniken und Algorithmen, die zur Berechnung von Vielteilchenamplituden nötig sind, soll der Einfluss der Supersymmetrie auf die Berechnung von Amplituden untersucht werden. Als Modell wurde das Wess-Zumino-Modell (WZM) gewählt, da der Teilcheninhalt sehr beschränkt ist, jedoch alle Aspekte einer supersymmetrischen Theorie studiert werden können, also algebraischen Vereinfachungen, die von der Supersymmetrie bedingt werden besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden kann.

Die grundlegenden Aspekte der Supersymmetrie sowie die Herleitung des WZM werden in Kapitel 2 beschrieben. Eine wichtige Folge der Supersymmetrie ist das Nicht-Renormierungs-Theorem, das Vorhersagen über die Renormierungskonstanten eines supersymmetrischen Modells macht. Um durch explizite Rechnung dieses Theorem am Beispiel des masselosen WZM in Kapitel 4 bestätigen zu können, wird vorab das nötige technische Werkzeug in Kapitel 3 bereitgestellt und eine Zahl von vereinfachenden Notationen eingeführt. Mit Hilfe des renormierten Modells ist es nun möglich, die Vier- und Sechsskalaramplitude des masselosen WZM zu berechnen. In Kapitel 5 wird eine explizite Rechnung dazu vorgestellt und diskutiert. Diese Rechnung wurde durch eine Implementierung im Computer-Algebra-System `FORM` verifiziert. Hinweise zu einer solchen Implementierung werden im Anhang 8.3 gegeben. Eine zweite Anwendung der Supersymmetrie neben dem Nicht-Renormierungs-Theorem stellen die supersymmetrischen Ward-Identitäten dar. Diese werden für das WZM in Kapitel 6 hergeleitet, und an einigen Beispielen wird gezeigt, wie man aus den Skalar- und Pseudoskalaramplituden Ausdrücke für Amplituden gewinnen kann, an denen externe Fermionen beteiligt sind. Eine abschließende Diskussion und Zusammenfassung der Ergebnisse mit einem Ausblick auf weiterführende Projekte findet sich in Kapitel 7. Im Anhang sind wichtige Formeln und Definitionen zusammengefasst, die sich auch in der angegebenen Literatur wiederfinden.

# 2 Das Wess-Zumino-Modell

## 2.1 Supersymmetrie

### 2.1.1 Die Supersymmetrie-Algebra

Wie bereits in der Einleitung angedeutet, entstand die Idee einer supersymmetrischen Erweiterung der Poincaré-Gruppe aus dem No-Go-Theorem, welches besagt, dass keine Vereinheitlichung der Raumzeitsymmetrien mit inneren Symmetrien der Teilchenphysik möglich ist, außer der trivialen [CM67]. Dieses Theorem setzt allerdings voraus, dass es sich bei den inneren Symmetrien um Lie-Gruppen handelt. Lie-Gruppen sind definiert durch ihre Lie-Algebra, einem Set von Vertauschungsrelationen der Generatoren $T^a$ der Lie-Gruppe, von der Form[1]

$$\left[T^a, T^b\right] \equiv T^a T^b - T^b T^a = i f_c^{ab} T^c, \tag{2.1}$$

wobei die $f_c^{ab}$ die sogenannten Strukturkonstanten der Lie-Algebra sind.

Die Poincaré-Algebra ist die Lie-Algebra der Generatoren $M^{\mu\nu}$ und $P^\mu$ der Poincaré-Gruppe [BL94, S. 3ff.] und erfüllt die Relationen

$$\begin{aligned}
\left[P^\mu, P^\nu\right] &= 0, && (2.2)\\
\left[M^{\mu\nu}, M^{\rho\lambda}\right] &= i\left(g^{\nu\rho}M^{\mu\lambda} - g^{\nu\lambda}M^{\mu\rho} + g^{\mu\lambda}M^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}M^{\nu\lambda}\right) \quad \text{und} && (2.3)\\
\left[M^{\mu\nu}, P^\lambda\right] &= i\left(g^{\nu\lambda}P^\mu - g^{\mu\lambda}P^\nu\right). && (2.4)
\end{aligned}$$

Als Erweiterung der Poincaré-Gruppe zu einer supersymmetrischen Algebra lässt man nun neben den Operatoren mit (bosonischen) Vertauschungsrelationen auch solche mit Antivertauschungsrelationen bzw. fermionische Vertauschungsrelationen zu,

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} \equiv Q_\alpha Q_\beta + Q_\beta Q_\alpha \overset{\text{i.A.}}{\neq} 0. \tag{2.5}$$

Aufgrund ihrer fermionischen Vertauschungsrelationen nennt man diese Operatoren auch fermionische Operatoren. Zu jedem fermionischen Operator $Q_\alpha$ existiert auch der adjungierte Operator

$$\overline{Q}^{\dot{\alpha}} \equiv (Q_\alpha)^\dagger\,. \tag{2.6}$$

[1] Hier und in der gesamten Arbeit setze ich die Einstein'sche Summationskonvention voraus, die besagt, dass in einem Produkt über gleiche ko- und kontravariante Indizes zu summieren ist. Der Deutlichkeit wegen verwende ich auch bei Lie-Gruppen eine Schreibweise mit oberen und unteren Indizes, obwohl es sich hier nicht um ko- und kontravariante Strukturen im engeren Sinne handelt.

Um diese Operatoren mit der Poincaré-Algebra in Verbindung zu bringen, muss man sie als Weyl-Spinoren auffassen, d. h. unter anderem, ihre Indizes besitzen den Wertebereich $\alpha = 1, 2$ und $\dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}$, und ko- und kontravariante Indizes sind über die Metriken

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \left(i\sigma^2\right)_{\alpha\beta} \quad \text{und} \quad \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \left(i\bar{\sigma}^2\right)^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \tag{2.7}$$

verknüpft, wobei wie üblich $\sigma^\mu$ die Pauli-Matrizen bezeichnet (s. (8.2)–(8.5)).

Aus der Forderung, die Menge der Operatoren minimal zu erweitern lassen sich alle Relationen der Algebra ableiten. Dazu benutzt man zunächst die Jacobi-Identität

$$\left[T^a, \left[T^b, T^c\right]\right] + \left[T^b, \left[T^c, T^a\right]\right] + \left[T^c, \left[T^a, T^b\right]\right] = 0. \tag{2.8}$$

Diese lässt sich allein aus der Definition des Kommutators ohne Verwendung von (2.1) nachrechnen. Wendet man diese Gleichung auf $P^\mu$, $P^\nu$ und $Q_\alpha$ an, so ergibt sich [BL94]

$$[P^\mu, [P^\nu, Q_\alpha]] + [P^\nu, [Q_\alpha, P^\mu]] + [Q_\alpha, [P^\mu, P^\nu]] = 0. \tag{2.9}$$

Aufgrund der Indexstruktur von $[P^\mu, Q_\alpha]$ ist die einzige Möglichkeit, die rechte Seite linear durch Operatoren auszudrücken[2]

$$[P^\mu, Q_\alpha] = c\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\overline{Q}^{\dot{\beta}} \tag{2.10}$$

mit der noch zu bestimmenden Konstante $c$; dies ist der einzig mögliche Term, der genau einen Spinorindex $\alpha$ und einen Lorentz-Index $\mu$ enthält. Den Kommutator für $\overline{Q}^{\dot{\beta}}$ erhält man durch komplexe Konjugation, nämlich

$$\left[P^\mu, \overline{Q}^{\dot{\beta}}\right] = \left[-(P^\mu)^*, (Q_\beta)^*\right] = -\left[P^\mu, Q_\beta\right]^* = -c^*(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\beta}\gamma}Q_\gamma. \tag{2.11}$$

Setzt man beide Kommutatoren sowie (2.2) in (2.9) ein, so bleibt als Ergebnis

$$-|c|^2\sigma^\nu_{\alpha\dot{\beta}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\beta}\gamma}Q_\gamma - |c|^2\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\beta}\gamma}Q_\gamma + 0 = 0. \tag{2.12}$$

Die Gleichung ist also nur erfüllt, wenn $c = 0$ gewählt wird. Die Operatoren $P^\mu$ und $Q_\alpha$ vertauschen also,

$$[P^\mu, Q_\alpha] = \left[P^\mu, \overline{Q}^{\dot{\alpha}}\right] = 0. \tag{2.13}$$

Um die Notation zu erleichtern, kann man die beiden fermionischen Operatoren zu einem Majorana-Spinor zusammenfassen,

$$\mathbf{Q} \equiv \begin{pmatrix} Q_\alpha \\ \overline{Q}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{Q}} \equiv \left(Q^\alpha, \overline{Q}_{\dot{\alpha}}\right), \tag{2.14}$$

dann gilt

$$[P^\mu, \mathbf{Q}] = 0. \tag{2.15}$$

[2] Auch für die Supersymmetriealgebra wird analog zu Lie-Algebren die Form $\left[T^A, T^B\right] = if^{AB}_C T^C$ bzw $\left\{T^A, T^B\right\} = if^{AB}_C T^C$ gefordert.

Um die Vertauschungsrelation von $\mathbf{Q}$ mit den Generatoren $M^{\mu\nu}$ zu berechnen [BL94, S. 13f.], verwendet man das Transformationsverhalten von Spinoren unter einer infinitesimalen Lorentz-Transformation $\Lambda$,

$$\Lambda = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right). \tag{2.16}$$

Die Spin-1/2-Darstellung $\Lambda_{1/2}(\Lambda)$ ist gegeben durch [PS95, S. 42]

$$\Lambda_{1/2}(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\right) \tag{2.17}$$

mit der Matrix $\Sigma^{\mu\nu}$ wie in (8.9), und das Transformationsverhalten eines Dirac-Spinors[3] ist

$$\mathbf{\Psi}'(x) = \Lambda_{1/2}(\Lambda)\mathbf{\Psi}(\Lambda^{-1}x). \tag{2.18}$$

Da $\mathbf{Q}$ nicht nur ein Spinor sondern auch ein Operator ist, gilt außerdem die Relation [Tun85, S. 202]

$$\Lambda^{-1}\mathbf{Q}\Lambda = \Lambda_{1/2}(\Lambda)\mathbf{Q} \tag{2.19}$$

Diese Gleichung lautet für eine infinitesimale Transformation unter Verwendung von (2.16) und (2.17)

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right)\mathbf{Q}\left(1-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right) &= \left(1-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\right)\mathbf{Q} && (2.20)\\
\Leftrightarrow \quad \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\mathbf{Q} - \mathbf{Q}\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} &= -\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\mathbf{Q} && (2.21)\\
\Leftrightarrow \quad [M^{\mu\nu}, \mathbf{Q}] &= -\frac{1}{2}\Sigma^{\mu\nu}\mathbf{Q}, && (2.22)
\end{aligned}$$

was den gesuchten Kommutator liefert.

Zuletzt sind noch die fermionischen Vertauschungsrelationen zu spezifizieren, um die Algebra abzuschließen. Zunächst geht man vom allgemeinsten Ansatz aus,

$$\begin{aligned}
\{Q_\alpha, Q_\beta\} &= s\cdot(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_{\alpha\beta}M_{\mu\nu} \quad \text{und} && (2.23)\\
\left\{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\beta}\right\} &= t\cdot\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}P_\mu. && (2.24)
\end{aligned}$$

Da $P^\mu$ mit den fermionischen Operatoren vertauscht, muss die rechte Seite der ersten Relation verschwinden, denn

$$\begin{aligned}
0 &= \left\{Q_\alpha, \left[Q_\beta, P^\lambda\right]\right\} + \left\{Q_\beta, \left[Q_\alpha, P^\lambda\right]\right\} = \left[\{Q_\alpha, Q_\beta\}, P^\lambda\right]\\
&= s\cdot(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_{\alpha\beta}\left[M_{\mu\nu}, P^\lambda\right] = s(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_{\alpha\beta}\cdot i\left(g^{\nu\lambda}P^\mu - g^{\mu\lambda}P^\nu\right). \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

Die rechte Seite verschwindet genau dann, wenn $s = 0$ ist.

[3] also auch das eines Majorana-Spinors

Für die zweite Relation gewinnt man allerdings keine Einschränkungen, weswegen $t$ ein frei zu wählender Parameter ist; dieser wird üblicherweise als $t = 2$ festgelegt:

$$\left\{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\beta}\right\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta} P_\mu. \tag{2.26}$$

Alle drei unterschiedlichen Antikommutatorrelationen lassen sich auch in einer symbolischen Schreibweise zusammenfassen:

$$\{\mathbf{Q}, \overline{\mathbf{Q}}\} \equiv \begin{pmatrix} \{Q_\alpha, Q_\beta\} & \{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\beta}\} \\ \{\overline{Q}_{\dot\alpha}, Q_\beta\} & \{\overline{Q}_{\dot\alpha}, \overline{Q}_{\dot\beta}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\sigma^\mu P_\mu \\ 2\bar\sigma^\mu P_\mu & 0 \end{pmatrix} = 2\gamma^\mu P_\mu. \tag{2.27}$$

Die Gleichung (2.27) führt zu einem interessanten Resultat, denn sie kann verwendet werden, um den Operator $P^\mu$ durch die Supersymmetrieoperatoren auszudrücken [BL94, S. 15]:

$$\frac{1}{8}\mathrm{tr}\left(\gamma^\mu \left\{\mathbf{Q}, \overline{\mathbf{Q}}\right\}\right) = \frac{1}{4}\mathrm{tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\right) P_\nu = P^\mu \tag{2.28}$$

Der Vakuumerwartungswert der Energie ist damit

$$\begin{aligned} \langle 0|P^0|0\rangle = \frac{1}{8}\left\langle 0\middle|\mathrm{tr}\left(\gamma^0\left\{\mathbf{Q}, \overline{\mathbf{Q}}\right\}\right)\middle|0\right\rangle = \\ \frac{1}{8}\left\langle 0\middle|\mathrm{tr}\left(\langle Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\beta}\rangle\right) + \mathrm{tr}\left(\langle\overline{Q}_{\dot\alpha}, Q_\beta\rangle\right)\middle|0\right\rangle = \\ \frac{1}{4}\langle 0|[Q_1\overline{Q}_{\dot 1} + \overline{Q}_{\dot 1}Q_1 + Q_2\overline{Q}_{\dot 2} + \overline{Q}_{\dot 2}Q_2|0\rangle\,. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Das heißt andererseits, dass in einer supersymmetrischen Theorie der Vakuumerwartungswert der Energie genau dann verschwindet, wenn die Supersymmetrie ungebrochen ist,

$$\langle 0|P^0|0\rangle = 0 \Leftrightarrow Q_\alpha\,|0\rangle = 0. \tag{2.30}$$

Die fermionischen Operatoren $Q_\alpha$ und $\overline{Q}^{\dot\alpha}$ besitzen weitere interessante Eigenschaften, die aus der Algebra direkt abgeleitet werden können, indem man ihre Vertauschungsrelationen mit den Casimir-Operatoren der Poincaré-Algebra studiert [BL94, S. 15ff.],

$$P^2 = P^\mu P_\mu \quad \text{und} \tag{2.31}$$

$$W^2 = W^\mu W_\mu, \quad W^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu M_{\rho\sigma}. \tag{2.32}$$

Da $[P^\mu, \mathbf{Q}] = 0$ folgt auch, dass $[P^2, \mathbf{Q}] = 0$, das heißt, dass Zustände, die durch Supersymmetrieoperatoren auseinander hervorgehen, die gleiche Masse besitzen. Aus der Kommutatorrelation mit dem Quadrat des Pauli-Lubanski-Vektors $W^\mu$ folgt nach längerer Rechnung, dass die fermionischen Operatoren den Spin bzw. die Helizität eines Zustands um 1/2 ändern, also bosonische in fermionische Zustände überführen und umgekehrt. Eine ausführliche Rechnung dazu findet man in [MKW87, S. 210ff.] und in [BL94, S. 15ff.].

### 2.1.2 Superraum und Superfelder

Eine sehr kompakte Formulierung supersymmetrischer Feldtheorien liefert der Ansatz über Superfelder. Dazu erweitert man den vierdimensionalen Minkowski-Raum um zwei antikommutierende Weyl-Spinoren $\theta$ und $\bar{\theta}$ zum sogenannten Superraum

$$\hat{\Sigma} \equiv \{z | z = (x^\mu, \theta, \bar{\theta})\}. \tag{2.33}$$

Für die Komponenten der Variablen $\theta$ und $\bar{\theta}$ sind die Antivertauschungsrelationen

$$\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = \{\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\} = \{\theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\} = 0 \tag{2.34}$$

erklärt. Außerdem definiert man das Skalarprodukt für Weyl-Spinoren

$$\begin{aligned} \theta\theta &= \theta^\alpha\theta_\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\theta_\alpha\theta_\beta = \theta_2\theta_1 - \theta_1\theta_2 \quad \text{und} \\ \bar{\theta}\bar{\theta} &= \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \bar{\theta}^{\dot{2}}\bar{\theta}^{\dot{1}} - \bar{\theta}^{\dot{1}}\bar{\theta}^{\dot{2}} \end{aligned} \tag{2.35}$$

Aus (2.34) folgt insbesondere dass $\theta^\alpha\theta^\alpha = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} = 0$.

Führt man des weiteren die Differentiation nach Grassmann-Variablen ein [MKW87, 322], so dass gilt

$$\frac{\partial\theta^\alpha}{\partial\theta^\beta} = \delta^\alpha_\beta \quad \text{und} \tag{2.36}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \theta^\beta\right\} = \delta^\beta_\alpha, \tag{2.37}$$

dann besitzen die Supersymmetrieoperatoren $Q_\alpha$ und $\bar{Q}^{\dot{\alpha}}$ eine Darstellung als Differentialoperatoren in $\hat{\Sigma}$ [BL94, S. 35]:

$$iQ_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{2.38}$$

$$i\overline{Q}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{2.39}$$

Diese sind die infinitesimalen Erzeugenden der allgemeinen Supersymmetrietransformation $g(x, \theta, \bar{\theta}) : \hat{\Sigma} \mapsto \hat{\Sigma}$

$$g(x, \xi, \bar{\xi}) = \exp\left(-ix_\mu P^\mu + i\xi Q + i\bar{\xi}\bar{Q}\right). \tag{2.40}$$

Die so erzeugte Transformation bewirkt eine Translation im Superraum (s. z. B. [Moh02])

$$g(x, \xi, \bar{\xi})(y^\mu, \theta, \bar{\theta}) = (y^\mu + x^\mu - i(\xi\sigma^\mu\bar{\theta} - \bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\theta), \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}). \tag{2.41}$$

Eine Funktion $\mathbf{\Phi} : \hat{\Sigma} \mapsto \mathbb{C}$ heißt skalares Superfeld. Aufgrund der Antikommutatorrelationen der Grassmann-Variablen $\theta$ und $\bar{\theta}$ besitzt ein Superfeld stets eine endliche Entwicklung in $\theta$ und $\bar{\theta}$, nämlich [Moh02, 228]

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}(x, \theta, \bar{\theta}) &= \Phi(x) + \theta\psi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta F(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}G(x) + \\ &\quad \theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\xi}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\zeta(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}M(x). \end{aligned} \tag{2.42}$$

Ziel ist es nun, eine Wirkung bzw. eine zugehörige Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ zu finden, die unter Supersymmetrietransformationen invariant ist, mit einem Teilcheninhalt, der genau einem chiralen supersymmetrischen Multiplett entspricht. Dazu werden zunächst die kovarianten Ableitung $\mathcal{D}_\alpha$ und $\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}$ konstruiert

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\alpha &\equiv \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\mu} && (2.43)\\ \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha} &\equiv -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} - i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\mu}. && (2.44) \end{aligned}$$

Es ist leicht zu zeigen, dass die kovarianten Ableitungen mit den Supersymmetrieoperatoren $Q_\alpha$ und $\bar{Q}^{\dot\alpha}$ antivertauschen, also $\{\mathcal{D}_\alpha, Q_\beta\} = \{\mathcal{D}_\alpha, \bar{Q}^{\dot\beta}\} = 0$ gilt[4] [MKW87]. Dass $\mathcal{D}_\alpha$ wirklich eine kovariante Ableitung bildet, erkennt man daran, dass $\mathcal{D}_\alpha$ mit den Supersymmetrietransformationen $g(x, \theta, \bar\theta)$ vertauscht, was nun leicht zu zeigen ist, denn

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_\alpha, \xi Q] &= \mathcal{D}_\alpha\xi_\beta Q^\beta - \xi_\beta Q^\beta\mathcal{D}_\alpha \\ &= -\xi_\beta(\mathcal{D}_\alpha Q^\beta + Q^\beta\mathcal{D}_\alpha) \\ &= -\xi_\beta\{\mathcal{D}_\alpha, Q^\beta\} \\ &= 0. && (2.45) \end{aligned}$$

Analog folgen die restlichen Vertauschungsrelationen.

Die Wirkung $\mathcal{S}$ ist als Volumenintegral der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ über den gesamten Raum $\hat\Sigma$ definiert [Moh02, 236ff]

$$\mathcal{S} = \int \mathrm{d}\hat\Sigma\mathcal{L} = \int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^2\theta\mathrm{d}^2\bar\theta\mathcal{L}(x, \theta, \bar\theta), \qquad (2.46)$$

wobei die Integration über Grassmann-Variablen durch sogenannte Berezin-Integrale definiert ist

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}\theta_\alpha &\equiv 0 && (2.47)\\ \int \mathrm{d}\theta_\alpha\theta_\beta &\equiv \delta^\alpha_\beta = \frac{\partial\theta_\beta}{\partial\theta_\alpha}. && (2.48) \end{aligned}$$

Die in (2.46) verwendeten Differentiale definiert man durch

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2\theta &\equiv \frac{1}{2}\mathrm{d}\theta^1\mathrm{d}\theta^2 && (2.49)\\ \mathrm{d}^2\bar\theta &\equiv \frac{1}{2}\mathrm{d}\bar\theta^{\dot 1}\mathrm{d}\bar\theta^{\dot 2}. && (2.50) \end{aligned}$$

Betrachtet man nun die Definition der kovarianten Ableitung (2.43), so erkennt man, dass unter dem Integral $\int\mathrm{d}^4x$ der zweite Term von $\mathcal{D}_\alpha$ eine totale Divergenz bildet und nach dem Green'schen Satz verschwindet. Die Ableitung nach $\theta_\alpha$ hat jedoch die gleiche Wirkung wie die Integration $\int\mathrm{d}\theta_\alpha$, und man findet die Identitäten [Moh02, 238]

$$\int \mathrm{d}\hat\Sigma f(x, \theta, \bar\theta) = -\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^2\theta\bar{\mathcal{D}}^2 f(x, \theta, \bar\theta) = \frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^2\bar\theta\mathcal{D}^2 f(x, \theta, \bar\theta). \qquad (2.51)$$

[4] Analoge Relationen gelten auch für $\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}$.

### 2.1.3 Das chirale Superfeld

Betrachtet man die Entwicklung des Superfeldes $\mathbf{\Phi}$ in (2.42), so stellt man fest, dass der Teilcheninhalt der Komponentenfelder wesentlich gößer ist, als der eines supersymmetrischen Teilchenmultipletts. Um also zu einem irreduziblen Multiplett zu gelangen, kann man an das allgemeine skalare Superfeld noch kovariante Zusatzbedingungen stellen, die es erlauben, genau ein Multiplett zu erzeugen. Das sogenannte chirale bzw. antichirale Multiplett erhält man durch die Zusatzbedingung

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\mathbf{\Phi} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{D}_{\alpha}\mathbf{\Phi}^{+} = 0. \tag{2.52}$$

Zur Lösung dieser Gleichung [MKW87, 388ff] betrachtet man die Variablentransformationen $x^\mu \longrightarrow y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$ und $x^\mu \longrightarrow \bar{y}^\mu = x^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$, denn es ist

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} y^\mu &= \left(-\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha\sigma^\nu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\nu\right)\left(x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\right) \\
&= i\theta^\beta\sigma^\mu_{\beta\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} - i\theta^\alpha\sigma^\nu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\nu x^\mu \\
&= i\theta^\beta\sigma^\mu_{\beta\dot{\beta}}\delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}} - i\theta^\alpha\sigma^\nu_{\alpha\dot{\alpha}}g^{\mu\nu} = 0,
\end{aligned} \tag{2.53}$$

und ebenso ist trivialerweise $\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\theta_\beta = 0$. Man erhält analog $\mathcal{D}_\alpha\bar{y}^\mu = 0$ und $\mathcal{D}_\alpha\bar{\theta}^{\dot{\beta}}$. Die Bedingung (2.52) ist also für alle Felder erfüllt, in denen nur $y^\mu$ und $\theta$ bzw. $\bar{y}^\mu$ und $\bar{\theta}$ auftreten, also

$$\mathbf{\Phi}(y,\theta) = \Phi(y) + \theta\Psi(y) + \theta\theta F(y) \,\text{und} \tag{2.54}$$

$$\mathbf{\Phi}^{+}(\bar{y},\bar{\theta}) = \Phi(\bar{y}) + \bar{\theta}\chi(\bar{y}) + \bar{\theta}\bar{\theta}G(\bar{y}). \tag{2.55}$$

In der Entwicklung verbleiben also nur ein komplexes, skalares Feld $\Phi$, ein Majorana-Fermion $\Psi$ und ein komplexes, skalares Hilfsfeld $F$. Wegen $\theta^* = \bar{\theta}$ kann man $\mathbf{\Phi}^{+} = \mathbf{\Phi}^{\dagger}$ identifizieren und erhält

$$\mathbf{\Phi}^{\dagger}(\bar{y},\bar{\theta}) = \Phi^*(\bar{y}) + \bar{\theta}\bar{\Psi}(\bar{y}) + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(\bar{y}). \tag{2.56}$$

Es ist leicht einzusehen, dass beliebige Potenzen von $\mathbf{\Phi}$ bzw. $\mathbf{\Phi}^{\dagger}$ wieder chirale bzw. antichirale Superfelder bilden, da sie nur von $(y,\theta)$ bzw. $(\bar{y},\bar{\theta})$ abhängen. Dagegen bilden gemischte Produkte, wie zum Beispiel $\mathbf{\Phi}^{\dagger}\mathbf{\Phi}$ kein chirales Feld.

Die Rücktransformation [BL94, 36] in die eingangs gewählten Variablen $(x,\theta,\bar{\theta})$ erfolgt durch Taylor-Entwicklung in $y$ um $y = x$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}(x,\theta,\bar{\theta}) &= \Phi(x) + \theta\Psi(x) + \theta\theta F(x) + i\partial_\mu\Phi(x)\theta\sigma^\mu\bar{\theta} \\
&\quad + i\theta\partial_\mu\Psi(x)\theta\sigma^\mu\bar{\theta} - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu\Phi(x)\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\theta\sigma^\nu\bar{\theta} \\
&= \Phi(x) + \theta\Psi(x) + \theta\theta F(x) + i\partial_\mu\Phi(x)\theta\sigma^\mu\bar{\theta} \\
&\quad - \frac{i}{2}(\theta\theta)(\partial_\mu\Psi(x)\sigma^\mu\bar{\theta}) - \frac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu\Phi(x)(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Diese Entwicklung bricht wegen der Grassmann=Eigenschaft $\theta_\alpha\theta_\alpha = 0$ nach dem quadratischen Glied in $\theta$ bzw. $\bar\theta$ exakt ab, stellt also keine Näherung dar. Die zweite Umformung der Gleichung erhält man durch Anwendung der Fierz-Identitäten (8.21). Eine analoge Rechnung ergibt die Entwicklung für $\mathbf{\Phi}^\dagger$

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}^\dagger(x,\theta,\bar\theta) &= \Phi^*(x) + \bar\theta\bar\Psi(x) + \bar\theta\bar\theta F^*(x) - i\partial_\mu\Phi^*(x)\theta\sigma^\mu\bar\theta \\ &+\frac{i}{2}(\bar\theta\bar\theta)(\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar\Psi(x)) - \frac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu\Phi^*(x)(\theta\theta)(\bar\theta\bar\theta) \end{aligned} \tag{2.58}$$

Im vorangegangenen Kapitel wurden bereits Supersymmetrietransformationen eingeführt, und es wurde bereits festgestellt, dass diese angewandt auf ein Superfeld lediglich eine Translation im Superraum bewirkten. Im folgenden wird die Wirkung infinitesimaler Transformationen auf die Komponenten des chiralen Superfeldes untersucht,

$$g(0,\xi,\bar\xi)\mathbf{\Phi}(x,\theta,\bar\theta) = \exp\left[i\left(\xi^\alpha Q_\alpha + \bar\xi_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha}\right)\right]\mathbf{\Phi}(x,\theta,\bar\theta) = \left(1 + i\Xi\mathbf{Q}\right)\mathbf{\Phi}(x,\theta,\bar\theta), \tag{2.59}$$

wobei $\Xi$ der aus $\xi^\alpha$ und $\bar\xi_{\dot\alpha}$ gebildete Majoranaspinor ist. Setzt man die bereits bekannte Darstellung (2.38) und (2.39) der Operatoren ein, so kann man die Transformation der Komponentenfelder unmittelbar bestimmen. Zunächst führt man die Transformation für das skalare Feld $\Phi$ aus[5],

$$\begin{aligned} i\Xi\mathbf{Q}\Phi(x) = &\left[i\left(\bar\theta\bar\sigma^\mu\xi + \theta\sigma^\mu\bar\xi\right)\partial_\mu + \left(\xi^\alpha\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + \bar\xi_{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar\theta_{\dot\alpha}}\right)\right]\Phi(x) = \\ &i\theta\sigma^\mu\bar\xi\partial_\mu\Phi(x) + i\bar\theta\bar\sigma^\mu\xi\partial_\mu\Phi(x) = +i\theta\sigma^\mu\bar\xi\partial_\mu\Phi(x) + \mathcal{O}(\bar\theta). \end{aligned} \tag{2.60}$$

Analog bestimmt man alle Transformationen, die Terme erzeugen, die nach Koeffizientenvergleich den Termen $\Phi$, $\theta\Psi$ und $\theta\theta F$ entsprechen. Um das angegebene Ergebnis zu erzielen werden unter anderem die Fierz-Transformationen (8.21ff.) eingesetzt.

$$\begin{aligned} i\Xi\mathbf{Q}\theta\Psi(x) &= \left[i\left(\bar\theta\bar\sigma^\mu\xi + \theta\sigma^\mu\bar\xi\right)\partial_\mu + \left(\xi^\alpha\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + \bar\xi_{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar\theta_{\dot\alpha}}\right)\right]\theta\Psi(x) \\ &= (\theta\sigma^\mu\bar\xi)\theta i\partial_\mu\Psi(x) + \xi\Psi(x) + \mathcal{O}(\bar\theta) \\ &= \xi\Psi(x) - \frac{1}{2}(\theta\theta)\left(i\partial_\mu\Psi(x)\sigma^\mu\bar\xi\right) + \mathcal{O}(\bar\theta) \end{aligned} \tag{2.61}$$

$$\begin{aligned} i\Xi\mathbf{Q}(\theta\theta)F(x) &= i(\theta\theta)\left(\bar\theta\bar\sigma^\mu\xi\right)\partial_\mu F(x) + 2(\xi\theta)F(x) \\ &= 2(\theta\xi)F(x) + \mathcal{O}(\bar\theta) \end{aligned} \tag{2.62}$$

$$\begin{aligned} i\Xi\mathbf{Q}\left[i\partial_\mu\Phi(x)\theta\sigma^\mu\bar\theta\right] &= -\bar\xi_{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}}\left(\bar\theta_{\dot\beta}\bar\sigma^{\mu,\dot\beta\beta}\theta_\beta\right)(i\partial_\mu\Phi(x)) + \mathcal{O}(\bar\theta) \\ &= \left(\theta\sigma^\mu\bar\xi\right)i\partial_\mu\Phi(x) + \mathcal{O}(\bar\theta) \end{aligned} \tag{2.63}$$

$$\begin{aligned} i\Xi\mathbf{Q}\left[-\frac{i}{2}(\theta\theta)\left(\partial_\mu\Psi(x)\sigma^\mu\bar\theta\right)\right] &= \frac{i}{2}(\theta\theta)\bar\xi_{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar\theta_{\dot\alpha}}\bar\theta\bar\sigma^\mu\partial_\mu\Psi(x) + \mathcal{O}(\bar\theta) \\ &= \frac{i}{2}(\theta\theta)\bar\xi\bar\sigma^\mu\partial_\mu\Psi(x) + \mathcal{O}(\bar\theta) \end{aligned} \tag{2.64}$$

[5]Eine ausführliche Übersicht der Rechenregeln mit Ableitungen nach Grassmann-Zahlen findet man z. B. in [Sim95]

Der letzte Term von $\mathbf{\Phi}$, $-1/4\Box\Phi(x)(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})$, kann nur Beiträge $\mathcal{O}(\bar{\theta})$ liefern. Fasst man nun die Beiträge wieder zusammen und sortiert sie nach Potenzen von $\theta$,

$$
\begin{aligned}
&g(0,\xi,\bar{\xi})\mathbf{\Phi}(x,\theta,\bar{\theta}) = \\
&\qquad [\Phi(x) + \xi\Psi(x)] + \theta^\alpha \left[\Psi_\alpha(x) + 2\xi_\alpha F(x) + 2(\sigma^\mu\bar{\xi})_\alpha(i\partial_\mu)\Phi(x)\right] \\
&\qquad\qquad + (\theta\theta)\left[F(x) - i\partial_\mu\Psi(x)\sigma^\mu\bar{\xi}\right] + \ldots
\end{aligned}
\tag{2.65}
$$

so erhält man das Transformationsverhalten aller Komponentenfelder von $\mathbf{\Phi}$,

$$\delta_\Xi\Phi(x) = \xi\Psi(x), \tag{2.66}$$

$$\delta_\Xi\Psi_\alpha(x) = 2\xi_\alpha F(x) + 2(\sigma^\mu\bar{\xi})_\alpha i\partial_\mu\Phi(x) \quad \text{und} \tag{2.67}$$

$$\delta_\Xi F(x) = -\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu i\partial_\mu\Psi(x). \tag{2.68}$$

Führt man die gleiche Rechnung für das Superfeld $\mathbf{\Phi}^+$ durch, so erhält man analog die Transformationen der adjungierten Komponentenfelder,

$$\delta_\Xi\Phi^*(x) = \bar{\xi}\bar{\Psi}(x), \tag{2.69}$$

$$\delta_\Xi\bar{\Psi}^{\dot{\alpha}}(x) = 2\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}F^*(x) + 2(\bar{\sigma}^\mu\xi)^{\dot{\alpha}}i\partial_\mu\Phi^*(x) \quad \text{und} \tag{2.70}$$

$$\delta_\Xi F^*(x) = \xi\sigma^\mu i\partial_\mu\bar{\Psi}(x). \tag{2.71}$$

Die Supersymmetrietransformationen sind also linear in den Feldern $\Phi$, $\Psi$ und $F$. Diese Formeln bilden in Kapitel 6 die Grundlage für die sogenannten supersymmetrischen Ward-Identitäten, mit deren Hilfe es möglich ist, Amplituden verschiedener äußerer Felder miteinander zu verknüpfen. Allerdings wird dort das Feld $F$ eliminiert, was zur Folge hat, dass die Transformationen eine nicht-lineare Gestalt annehmen.

## 2.2 Die Lagrange-Dichte des Wess-Zumino-Modells

### 2.2.1 Herleitung mit Weyl-Spinoren

Die Mächtigkeit des Superfeldformalismus zeigt sich bei der Konstruktion einer supersymmetrischen Wirkung $\mathcal{S}$ aus den Superfeldern $\mathbf{\Phi}$ und $\mathbf{\Phi}^\dagger$, denn dann kann die Wirkung als Volumenintegral über den gesamten Superraum geschrieben werden

$$\mathcal{S} = \int \mathrm{d}\hat{\Sigma}\mathcal{L}(\mathbf{\Phi}(x,\theta,\bar{\theta}), \mathbf{\Phi}^\dagger(x,\theta,\bar{\theta}))$$

über den gesamten Superraum $\hat{\Sigma}$, und eine Supersymmetrietransformation $g(y,\xi,\bar{\xi})$ bewirkt lediglich eine Verschiebung im Superraum, die durch Substitution unter dem Integral absorbiert werden kann, die Wirkung also manifest invariant lässt.

Die allgemeinste renormierbare Lagrange-Dichte [MKW87, 441f.] für ein chirales Multiplett[6], die in den Superfeldern $\mathbf{\Phi}$ und $\mathbf{\Phi}^\dagger$ angegeben werden kann, hat die Form

$$\mathcal{L} = \mathbf{\Phi}^\dagger\mathbf{\Phi} + \bar{\theta}\bar{\theta}\mathcal{W}(\mathbf{\Phi}) + \theta\theta\mathcal{W}(\mathbf{\Phi}^\dagger) \tag{2.72}$$

$$\mathcal{W}(\mathbf{\Phi}) = \frac{m}{2}\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi} + \frac{g}{3}\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}, \tag{2.73}$$

[6] Der Fall mehrerer Multipletts soll hier nicht betrachtet werden

wobei $\mathcal{W}$ das sogenannte Superpotential ist. Integrale der Form

$$\int \mathrm{d}\hat{\Sigma}\boldsymbol{\Phi}^n = \int \mathrm{d}^4x \mathrm{d}^2\theta \mathrm{d}^2\bar{\theta}\boldsymbol{\Phi}^n = \int \mathrm{d}^4x \mathrm{d}^2\theta \bar{\mathcal{D}}^2\boldsymbol{\Phi}^n$$

würden wegen (2.51) und (2.52) verschwinden, weswegen man die Deltafunktionen

$$\delta^2(\theta) = \theta\theta \quad \text{und} \quad \delta^2(\bar{\theta}) = \bar{\theta}\bar{\theta} \tag{2.74}$$

vor dem Superpotential einfügt; diese bewirken, dass durch die Integration die $\theta\theta$- bzw $\bar{\theta}\bar{\theta}$-Terme von $\boldsymbol{\Phi}^n$ herausprojeziert werden. Es sind also[7]

$$\int \mathrm{d}\hat{\Sigma}\bar{\theta}\bar{\theta}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi} = \int \mathrm{d}^4x(2F\Phi - \frac{1}{2}\Psi\Psi) \quad \text{und} \tag{2.75}$$

$$\int \mathrm{d}\hat{\Sigma}\bar{\theta}\bar{\theta}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi} = \int \mathrm{d}^4x\, 3(F\Phi\Phi - \frac{1}{2}\Psi\Psi\Phi). \tag{2.76}$$

Neben dem Superpotential taucht in der Lagrange-Dichte der kinetische Term $\boldsymbol{\Phi}^\dagger\boldsymbol{\Phi}$ auf. Seine Berechnung in Komponentenfeldern zeigt, dass dieser Term gerade die kinetischen Terme der Komponentenfelder $\Psi$ und $\Phi$ ergibt. Aufgrund der Grassmann-Eigenschaft von $\theta$ und $\bar{\theta}$ genügt es unter dem Integral, von $\boldsymbol{\Phi}^\dagger\boldsymbol{\Phi}$ nur jene Terme zu betrachten, in denen das Produkt $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ auftaucht. Alle anderen Terme verschwinden aufgrund der Berezin-Integration. Ebenfalls bleiben totale Divergenzen der Raumkoordinaten unberücksichtigt. Es ist dann

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}\hat{\Sigma}\boldsymbol{\Phi}^\dagger\boldsymbol{\Phi} &= \textstyle\int \mathrm{d}\hat{\Sigma}\{ && -\frac{1}{4}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\theta\Phi\Box\Phi - \frac{1}{4}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\theta\Phi^*\Box\Phi \\
&&& -\frac{i}{2}\theta\Psi\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_\mu\bar{\Psi}\bar{\sigma}^\mu\theta + \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\Psi}\theta\theta\partial_\mu\Psi\sigma^\mu\bar{\theta} \\
&&& \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\theta F^*F + \partial_\mu\Phi^*\partial_\nu\Phi(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})\} \\
&= \textstyle\int \mathrm{d}\hat{\Sigma} && \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\theta\{ \\
&&& -\frac{1}{4}(\Phi\Box\Phi^* + \Phi^*\Box\Phi) + \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi^*\partial^\mu\Phi + F^*F \\
&&& +\frac{i}{4}(\Psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\Psi} - \partial_\mu\Psi\sigma^\mu\bar{\Psi})\} \\
&= \textstyle\int \mathrm{d}^4x && (-\Phi^*\Box\Phi + F^*F + \frac{i}{2}\bar{\Psi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\Psi).
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Setzt man diese Ergebnisse in (2.72) ein, so erhält man[8]

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\Phi^*\Box\Phi + \frac{i}{2}\bar{\Psi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\Psi + F^*F \\
&\quad +m(F\Phi + F^*\Phi^*) - \frac{m}{4}(\Psi\Psi + \bar{\Psi}\bar{\Psi}) \\
&\quad +g(F\Phi\Phi + F^*\Phi^*\Phi^*) - \frac{g}{2}(\Psi\Psi\Phi + \bar{\Psi}\bar{\Psi}\Phi^*).
\end{aligned} \tag{2.78}$$

[7] Das negative Vorzeichen ergibt sich wegen $(\theta\Psi)(\theta\Psi) = -(1/2)(\theta\theta)(\Psi\Psi)$.

[8] Für den Rest der Arbeit werden die antikommutierenden Koordinaten des Superraums nicht mehr explizit angegeben.

Man sieht nun, dass das Feld $F$ keinen kinetischen Term besitzt, also kein propagierendes Teilchen beschreibt. Demnach sind die Euler-Lagrange-Gleichungen für $F$ und $F^*$ rein algebraische Gleichungen,

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu F} - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta F} \\ &= -F^* - m\Phi - g\Phi\Phi \quad \text{und} \qquad (2.79) \\ 0 &= \partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu F^*} - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta F^*} \\ &= -F - m\Phi^* - g\Phi^*\Phi^*. \qquad (2.80) \end{aligned}$$

Ein solches Feld heißt auch Hilfsfeld, da die rein algebraischen Bewegungsgleichungen es erlauben, das Feld aus der Lagrange-Dichte zu eliminieren. Die Lagrange-Dichte in ihrer Formulierung ohne das Hilfsfeld lautet dann

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\Phi^*\Box\Phi + \frac{i}{2}\bar{\Psi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\Psi - \frac{m}{4}(\Psi\Psi + \bar{\Psi}\bar{\Psi}) \\ &\quad -\frac{g}{2}(\Psi\Psi\Phi + \bar{\Psi}\bar{\Psi}\Phi^*) - \mathcal{V}(\Phi,\Phi^*), \qquad (2.81) \\ \mathcal{V}(\Phi,\Phi^*) &= m^2\Phi^*\Phi + mg(\Phi\Phi\Phi^* + \Phi\Phi^*\Phi^*) + g^2\Phi\Phi\Phi^*\Phi^*. \qquad (2.82) \end{aligned}$$

### 2.2.2 Formulierung mit Majorana-Spinoren

Für die Ableitung der Feynman-Regeln ist eine kovariante Schreibweise mit Majorana-Spinoren gegenüber den Weyl-Spinoren zu bevorzugen. Ein Majorana-Spinor $\boldsymbol{\Psi}$ ist ein Viererspinor, der sich aus einem konjugierten Paar von Weyl-Spinoren zusammensetzt,

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{pmatrix} \Psi_\alpha \\ \bar{\Psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{\boldsymbol{\Psi}} = \begin{pmatrix} \Psi^\alpha & \bar{\Psi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \qquad (2.83)$$

Man zeigt leicht, dass dadurch die eigentliche Definition eines Majorana-Spinors über sein Verhalten unter Ladungskonjugation $\mathcal{C}$ [BK95, S. 21ff.]

$$\boldsymbol{\Psi}_M = \mathcal{C}\bar{\boldsymbol{\Psi}}_M^\mathsf{T}, \quad \text{mit } \mathcal{C} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix} \qquad (2.84)$$

erfüllt ist, nämlich

$$\mathcal{C}\bar{\boldsymbol{\Psi}}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^\beta \\ \bar{\Psi}_{\dot{\beta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_\alpha \\ \bar{\Psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Psi}. \qquad (2.85)$$

Produkte der Weyl-Spinoren $\Psi$ und $\bar{\Psi}$ können durch die Lorentz-invarianten Bilinearformen

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\Psi}}\boldsymbol{\Psi} &= +\Psi\Psi + \bar{\Psi}\bar{\Psi}, \qquad (2.86) \\ \bar{\boldsymbol{\Psi}}\gamma_5\boldsymbol{\Psi} &= -\Psi\Psi + \bar{\Psi}\bar{\Psi} \quad \text{und} \qquad (2.87) \\ \bar{\boldsymbol{\Psi}}\gamma^\mu\partial_\mu\boldsymbol{\Psi} &= 2\bar{\Psi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\Psi \qquad (2.88) \end{aligned}$$

ausgedrückt werden, nämlich durch die Ersetzungen

$$\Psi\Psi = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{\Psi}}(\mathbb{1}-\gamma_5)\mathbf{\Psi} \quad \text{und} \tag{2.89}$$

$$\bar{\Psi}\bar{\Psi} = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{\Psi}}(\mathbb{1}+\gamma_5)\mathbf{\Psi}. \tag{2.90}$$

Zusätzlich führe ich zur Vereinfachung der Feynman-Regeln die Skalierung

$$\begin{aligned} \mathbf{\Psi} &\longrightarrow \sqrt{2}\mathbf{\Psi}, \\ g &\longrightarrow g/2 \end{aligned}$$

durch. Letztendlich erhält man so die Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\bar{\mathbf{\Psi}}(i\partial\!\!\!/ - m)\mathbf{\Psi} - \Phi^*\Box\Phi - \mathcal{V}(\Phi,\Phi^*) \\ &\quad -\frac{g}{2}\left(\bar{\mathbf{\Psi}}\frac{\mathbb{1}-\gamma_5}{2}\mathbf{\Psi}\Phi + \bar{\mathbf{\Psi}}\frac{\mathbb{1}+\gamma_5}{2}\mathbf{\Psi}\Phi^*\right) \end{aligned} \tag{2.91}$$

$$\mathcal{V}(\Phi,\Phi^*) = m^2\Phi^*\Phi + \frac{mg}{2}(\Phi\Phi\Phi^* + \Phi\Phi^*\Phi^*) + \frac{g^2}{4}\Phi\Phi\Phi^*\Phi^*. \tag{2.92}$$

## 2.3 Feynman-Regeln

Die Feynman-Regeln zur Störungsentwicklung der S-Matrix können zum Beispiel durch das Wick'sche Theorem aus der Lagrange-Dichte mit Hilfe sogenannter Kontraktionen abgeleitet werden [Gre93, S. 270ff.]. Bei der Pfadintegralmethode [Gre93, Kap. 11, 12] dagegen werden die Feynman-Regeln durch Funktionalableitungen von erzeugenden Funktionalen nach den Feldern gewonnen. Da die mathematischen Hindergründe dieser Methoden für die weitere Arbeit irrelevant sind, genügt hier eine weniger formale, rezeptartige Ableitung der Feynman-Regeln, wie sie z. B. in [Bin04b] angegeben wird:

1. Suche alle Produkte in $i\mathcal{L}$, die genau eine bestimmte Anzahl von Feldern enthalten; diese bilden die äußeren Linien des Vertex.
2. Ersetze alle Ableitungen durch $(-i)$ mal die einlaufenden Impulse der Felder, auf die sie wirken[9].
3. Summiere über alle Permutationen der Indizes und Impulse gleicher äußerer Felder.
4. Streiche alle äußeren Felder[10].

Daneben erhält man die Propagatoren als Green-Funktionen der freien Feldgleichungen.

Abbildung 2.1 zeigt die Vertizes und Propagatoren des massiven Wess-Zumino-Modells, die mit der eben beschriebenen Methode gewonnen wurden. Da ein späterer Vergleich mit dem Yukawa-Modell ermöglicht werden soll, wurde hierzu die Lagrange-Dichte

[9] Punkt 2. entspricht der Fourier-Transformation

[10] Die Punkte 3. und 4. entsprechen der Funktionalableitung.

in den physikalischen Feldern $B$ und $C$ formuliert, mit $\Phi = (B + iC)/\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{\Psi}}(i\partial\!\!\!/ - m)\mathbf{\Psi} - \frac{1}{2}B\left(\Box + m^2\right)B - \frac{1}{2}C\left(\Box + m^2\right)C \\ - m\frac{g}{2\sqrt{2}}(B^3 + B^2C) - \frac{g^2}{8}\left(\frac{1}{2}B^4 + \frac{1}{2}C^4 + B^2C^2\right) \\ - \frac{g}{2\sqrt{2}}\bar{\mathbf{\Psi}}\left(B - i\gamma_5 C\right)\mathbf{\Psi} \end{aligned} \quad (2.93)$$

Das Feld $B$ entspricht dann einem skalaren Teilchen, während das $C$-Feld einen Pseudoskalar repräsentiert. Im Gegensatz zur Formulierung in den Feldern $\Phi$ und $\Phi^*$ bringt für die $B$- und $C$-Feld-Formulierung eine weitere Skalierung $g \to 2\sqrt{2}g$ weitere Vereinfachung.

Daneben empfiehlt es sich zu berücksichtigen, dass die Schleifenintegrale später in dimensionaler Regularisierung berechnet werden, das heißt, die Integrale werden in $d = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen berechnet. Damit die Wirkung auch in $d$ Dimensionen dimensionslos bleibt, muss ein weiterer Parameter, die Renormierungsskala $\mu$ eingeführt werden, der die Massendimension $[\mu] = 1$ besitzt.[11] Man betrachtet zunächst die Wirkung in $d$ Dimensionen

$$\mathcal{S} = \int \mathrm{d}^d x \mathcal{L} \quad (2.94)$$

und schließt aus der Bedingung $[\mathcal{S}] = 0$ und wegen $[\mathrm{d}^d x] = -d$, dass $[\mathcal{L}] = d$ ist. Aus den kinetischen Termen der Lagrange-Dichte leitet man zunächst die Massendimension der Felder ab,

$$d = [\bar{\mathbf{\Psi}}\partial\!\!\!/\mathbf{\Psi}] = 2[\mathbf{\Psi}] + 1 \quad \Rightarrow [\mathbf{\Psi}] = \frac{d-1}{2}, \quad (2.95)$$

$$d = [B\Box B] = 2[B] + 2 \quad \Rightarrow [B] = \frac{d-2}{2}, \quad (2.96)$$

$$d = [C\Box C] = 2[C] + 2 \quad \Rightarrow [C] = \frac{d-2}{2}. \quad (2.97)$$

Sind die Dimensionen der Felder bekannt, so kann man die Wechselwirkungsterme betrachten. Das Ziel ist es, dass die Lagrange-Dichte für den Fall $d = 4$ die bekannte Form annimmt, die Massendimension der Wirkung für beliebige $d$ dennoch stimmt. Dies kann man durch Multiplikation jedes Wechselwirkungsterms mit der Konstante

$$\mu^{(4-d)/x} \quad (2.98)$$

erreichen, wobei $x$ für jeden Term zu bestimmen ist. Es ist z. B.[12]

$$d = \left[\mu^{(4-d)/x} gB\bar{\mathbf{\Psi}}\mathbf{\Psi}\right] = \frac{4-d}{x} + \frac{d-2}{2} + 2\frac{d-1}{2} = \frac{4-d}{x} + d + \frac{d-4}{2} \quad (2.99)$$

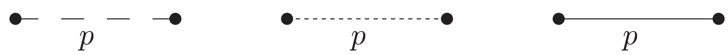
[11] Das Problem der analytischen Fortsetzbarkeit der $\gamma_5$-Matrix auf $d \neq 4$ Dimensionen ist bekannt [Kre93]. Ebenso ist bekannt, dass die dimensionale Regularisierung die Supersymmetrie bricht.

[12] Wegen $[B] = (d-2)/2$ kann man $[g] = 0$ aus dem Term $gB^4$ ablesen, indem man $d = 4$ setzt.

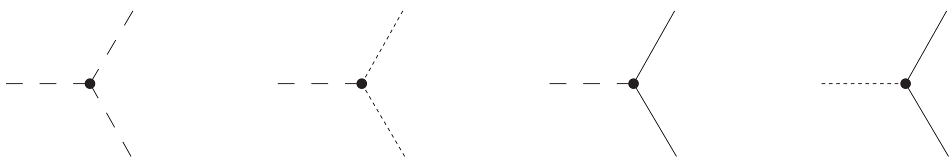
also $x = 2$. Analog bestimmt man die Koeffizienten aller anderen Terme, und letztendlich erhält man die neue, dimensional regularisierte Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{\Psi}}(i\not{\partial} - m)\mathbf{\Psi} - \frac{1}{2}B\left(\Box + m^2\right)B - \frac{1}{2}C\left(\Box + m^2\right)C \\ - \mu^{(4-d)/2}mg(B^3 + B^2C) - \mu^{4-d}g^2\left(\frac{1}{2}B^4 + \frac{1}{2}C^4 + B^2C^2\right) \\ - \mu^{(4-d)/2}g\bar{\mathbf{\Psi}}\left(B - i\gamma_5 C\right)\mathbf{\Psi} \quad (2.100)$$

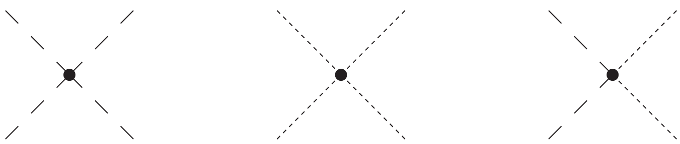
In dieser Form kann man die Feynman-Regeln direkt aus der Lagrange-Dichte ablesen bzw. mit Hilfe der angegebenen Ableitung bestimmen. In ihrer graphischen Repräsentation werden durchgehende Linien für die Fermionen[13], lang gestrichelte Linien für die Skalare und kurz gestrichelte Linien für die Pseudoskalare verwendet. Die Abbildung 2.1 zeigt alle Vertizes und Propagatoren des Wess-Zumino-Modells.




(a) $iS_B(p)$ (b) $iS_C(p)$ (c) $iS_{\mathbf{\Psi}}(p)$



(d) $V_{BBB}$ (e) $V_{BCC}$ (f) $V_{\bar{\mathbf{\Psi}}\mathbf{\Psi}B}$ (g) $V_{\bar{\mathbf{\Psi}}\mathbf{\Psi}C}$



(h) $V_{BBBB}$ (i) $V_{CCCC}$ (j) $V_{BBCC}$

Abbildung 2.1: Propagatoren und Vertizes des Wess-Zumino-Modells: Durchgezogene Linien repräsentieren Fermionen, lang gestrichelte Linien Skalare und kurz gestrichelte Linien Pseudoskalare.

[13]Der übliche Fermionpfeil fehlt hier, da es sich um Majorana-Teilchen handelt

Die sich ergebenden Propagatoren und Vertexfunktionen lauten

$$
\begin{aligned}
iS_B(p) &= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\delta} && (2.101)\\
iS_C(p) &= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\delta} && (2.102)\\
iS_{\Psi}(p) &= \frac{i}{\not{p} - m + i\delta} = i\frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\delta} && (2.103)\\
V_{BBB} &= -img\mu^{\frac{4-d}{2}} \cdot 3! && (2.104)\\
V_{BCC} &= -img\mu^{\frac{4-d}{2}} \cdot 2! && (2.105)\\
V_{BBBB} &= -ig^2\mu^{4-d} \cdot 12 && (2.106)\\
V_{CCCC} &= -ig^2\mu^{4-d} \cdot 12 && (2.107)\\
V_{BBCC} &= -ig^2\mu^{4-d} \cdot 4 && (2.108)\\
V_{\bar{\Psi}\Psi B} &= -ig\mu^{\frac{4-d}{2}} \cdot 2 && (2.109)\\
V_{\bar{\Psi}\Psi C} &= g\mu^{\frac{4-d}{2}}\gamma_5 \cdot 2 && (2.110)
\end{aligned}
$$

Der Übergang zum masselosen Modell kann einfach durch Einsetzen von $m = 0$ gewonnen werden. In diesem Fall verringert sich die Zahl der möglichen Kopplungen, da $V_{BBB}$ und $V_{BCC}$ von $m$ abhängen und im masselosen Limes verschwinden.

Neben der direkten Umsetzung von Diagrammelementen in Faktoren eines Ausdrucks sind noch weitere Feynman-Regeln nötig, die nicht speziell für das Wess-Zumino-Modell sind[14]. Diese sind im einzelnen:

1. Über alle Impulse innerer Linien wird integriert. Für jeden Schleifenimpuls $k_{(i)}$ wird ein Integral
$$\int \frac{\mathrm{d}^d k_{(i)}}{(2\pi)^d} \tag{2.111}$$
ausgeführt. Da sich diese Arbeit auf Einschleifenrechnungen beschränkt taucht also in den Amplituden genau ein solches Impulsintegral auf.

2. Jede geschlossene Fermionlinie liefert einen Faktor $-1$.

3. An den Vertizes gilt Impulserhaltung. Die Summe aller ein- und auslaufenden Impulse ist Null.

Die Berechnung aller Einschleifengraphen entspricht im Wess-Zumino-Modell der Untersuchung aller Korrekturen der Ordnung $\mathcal{O}(g^2)$ zu den Feynman-Graphen nullter Ordnung, deshalb wird im Folgenden häufig der Entwicklungsparameter

$$\alpha \equiv \frac{g^2}{4\pi} \tag{2.112}$$

verwendet.

[14]Eine ausführliche Behandlung am Beispiel der QED findet man z. B. in [Gre93]

# 3 Zugrundeliegende Rechenmethoden

## 3.1 Notationen, Konventionen und Mandelstam-Variablen

Um während der Zwischenschritte der Amplitudenberechnungen eine möglichst eindeutige Darstellung der Ausdrücke zu erhalten ist die Wahl der Darstellung der kinetischen Informationen von besonderer Relevanz. Von $2 \to 2$ Prozessen sind in der Regel die Mandelstam-Variablen $s$, $t$ und $u$ am geläufigsten. Dabei unterscheidet diese Notation bereits zwischen ein- und auslaufenden Teilchen, also auch ein- und auslaufenden Impulsen. In dieser Arbeit soll diese Unterscheidung per Konvention nicht gemacht werden. Es ist nämlich durch sogenannte ‚Crossing Relations' [PS95] problemlos möglich, von einer Amplitude mit ausschließlich einlaufenden Teilchen auf physikalische Amplituden zu schließen. Die Konvention wird also sein, alle Teilchen als einlaufend zu betrachten. Die Impulse externer Teilchen werden durchgehend mit $p_i^\mu$ für das $i$-te Teilchen bezeichnet.

Eine erste Einschränkung an die Amplituden ist die Drehinvarianz, da alle Raumrichtungen nur relativ zum Impuls anderer Teilchen angegeben werden können. Das Ergebnis hängt nicht von einer absoluten Raumrichtung ab, und so sind die eigentlichen Parameter immer Lorentz-Skalare. Dieser Sachverhalt rechtfertigt, als Variablen nur Skalarprodukte zuzulassen. Für diese Skalarprodukte werden die Abkürzungen

$$s_i \equiv p_i^2, \tag{3.1}$$

$$s_{ij} \equiv (p_i + p_j)^2 = p_i^2 + p_j^2 + 2p_i p_j = s_i + s_j + 2p_i p_j, \tag{3.2}$$

$$s_{ijk} \equiv (p_i + p_j + p_k)^2 \tag{3.3}$$

verwendet. Für Teilchen auf der Massenschale gilt zudem

$$s_i = m_i^2 \quad (= 0 \text{ im masselosen Modell}). \tag{3.4}$$

Darüberhinaus ist häufig die Abkürzung

$$p_{ijk\ldots} \equiv p_i + p_j + p_k + \ldots \tag{3.5}$$

zweckmäßig.

Würde man nun alle möglichen Skalarprodukte als Mandelstam-Variablen zulassen, so wäre das System überdefiniert. Eine Möglichkeit zu einer eindeutigen Codierung der kinetischen Informationen ist die Festlegung der Variablen durch sogenannte Schnitte. Ein Schnitt durch ein Diagramm wird anhand von Abbildung 3.1 erklärt, welche bereits drei Schnitte zeigt. Zunächst wird das Diagramm als eine flache Box betrachtet, in die

die externen Felder, die Beine des Diagramms, in festgelegter Reihenfolge hineinführen; das innere des Diagramms interessiert dabei nicht. Die Beine bilden dann die Ecken des Diagramms, dazwischen verlaufen dessen Kanten. Ein Schnitt ist dann eine Linie, die genau zwei Kanten des Diagramms schneidet, also durch eine Kante in das Diagramm hineinführt und durch eine zweite wieder hinaus. Es wird dabei nie durch Ecken geschnitten. Durch Induktion zeigt man, dass genau $n(n-1)/2$ solcher Schnitte für ein $n$-Teilchen-Diagramm existieren. Jeder Schnitt teilt die Menge der einlaufenden Impulse in zwei Mengen, wovon je eine Menge den Schnitt bereits vollständig charakterisiert. Auf diese Weise kann man jedem Schnitt ein Skalarprodukt zuordnen, nämlich gerade das Quadrat der Summe genau dieser Impulse. Aufgrund der Impulserhaltung ist diese Größe unbhängig von der Wahl einer der beiden Mengen. Zum Beispiel gilt für den Schnitt $s_{23}$

$$s_{23} = (p_2 + p_3)^2 = (0 - p_4 - p_5 - p_6 - p_1)^2 = (p_4 + p_5 + p_6 + p_1)^2. \tag{3.6}$$

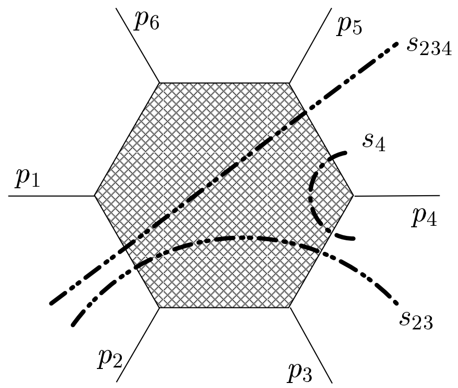



Abbildung 3.1: Drei von insgesamt 15 möglichen Schnitten an einer Sechsteilchenamplitude.

Es soll hier kein allgemeiner Beweis gegeben werden, dass dies für jede $n$-Teilchen-Amplitude eine ausreichende und möglichst eindeutige Wahl ist. Stattdessen werde ich für den Fall der Vier- und der Sechsteilchenkinematik die Mandelstam-Variablen angeben und zeigen, dass alle weiteren Skalarprodukte durch diese darstellbar sind.

Die Menge aller Schnitte für sechs Teilchen ist

$$\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_{12}, s_{23}, s_{34}, s_{45}, s_{56}, s_{61}, s_{123}, s_{234}, s_{345}\}. \tag{3.7}$$

Die möglichen Skalarprodukte sind[1] $p_i p_{i+1}$, $p_{i-1}p_{i+1}$ und $p_i p_{i+3}$. Das erste Skalarprodukt ist einfach durch quadratische Ergänzung darzustellen, denn

$$2p_i p_{i+1} = (p_i + p_{i+1})^2 - p_i^2 - p_{i+1}^2 = s_{i,i+1} - s_i - s_{i+1}. \tag{3.8}$$

[1] Die Indizes sind zyklisch zu verstehen, also $n+1 \equiv 1$, $n+2 \equiv 2$ etc.

Ein wenig mehr Aufwand erfordert das zweite Produkt

$$2p_{i-1}p_{i+1} = (p_{i-1} + p_{i+1})^2 - s_{i-1} - s_{i+1} = (p_{i-1,i,i+1} - p_i)^2 - s_{i-1} - s_{i+1} = \\ s_{i-1,i,i+1} - s_i - 2s_{i-1,i} - 2s_{i,i+1}. \quad (3.9)$$

Das Ergebnis für das dritte Produkt kann man durch Einsetzen der Definitionen für die Skalarprodukte auf der rechten Seite bestätigen

$$2p_ip_{i+3} = (s_{i+1,i+2} - s_{i,i+1,i+2}) + (s_{i-2,i-3} - s_{i-2,i-1,i}). \quad (3.10)$$

Zu berücksichtigen ist hier, dass $s_{456} = s_{123}$, $s_{561} = s_{234}$ und $s_{612} = s_{345}$ ist.

Die Rechnung für vier externe Teilchen ist wesentlich einfacher. Dort sind die Schnitte gegeben durch die Menge

$$\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_{12}, s_{14}\}. \quad (3.11)$$

Das einzige Skalarprodukt, das hier nicht enthalten ist, ist

$$2p_{i-1}p_{i+1} = s_i + s_{i+2} - s_{i-1,i} - s_{i,i+1}, \quad (3.12)$$

was aus der Relation $s_{12} + s_{13} + s_{14} = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$ unmittelbar folgt.

Als große Vereinfachung kommt in den Rechnungen zu tragen, dass im masselosen Fall sämtliche $s_i = 0$ sind, da nur on-shell Amplituden berechnet werden.

Alle Amplituden in dieser Arbeit werden für den nicht-physikalischen, Euklid'schen Bereich berechnet, der sich dadurch auszeichnet, dass alle Mandelstam-Variablen negativ sind, also für die Sechsteilchenkinematik

$$s_{i,i+1} < 0, \quad (3.13)$$
$$s_{i,i+1,i+2} < 0. \quad (3.14)$$

Physikalische Ergebnisse erhält man durch den Übergang

$$s_{i,i+1} \to s_{i,i+1} + i\delta, \quad (3.15)$$
$$s_{i,i+1,i+2} \to s_{i,i+1,i+2} + i\delta. \quad (3.16)$$

Eine ausführlichere Diskussion dazu findet man in [BGH00].

## 3.2 Auswertung von skalaren $n$-Punkt-Integralen

### 3.2.1 Konventionen und Schreibweisen

Es genügt für die Berechnung von Einschleifengraphen zunächst ein Verfahren um Integrale der Form

$$I_n^d(p_1, \ldots, p_n, m_1, \ldots, m_n) = \frac{(2\pi\mu)^{4-d}}{i\pi^2} \int \mathrm{d}^d k \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(k + r_i)^2 - m_i^2 + i\delta} \quad (3.17)$$

in $d$-dimensionaler Minkowski-Metrik zu berechnen, welche im Wesentlichen[2] einer nur aus skalaren Teilchen bestehenden Schleife entsprechen. Dies stellt keine Einschränkung dar, da mit Hilfe der Passarino-Veltman-Methode [PV79] alle auftretenden Integrale auf die Form (3.17) gebracht werden können. Hierbei sind $p_1, \ldots, p_n$ die einlaufenden Impulse der externen Teilchen und $m_1, \ldots, m_n$ die Massen der Propagatoren mit den Impulsen $q_1, \ldots, q_n$ (s. Abb. 3.2). Der Schleifenimpuls wird mit $k$ bezeichnet. Des wei-

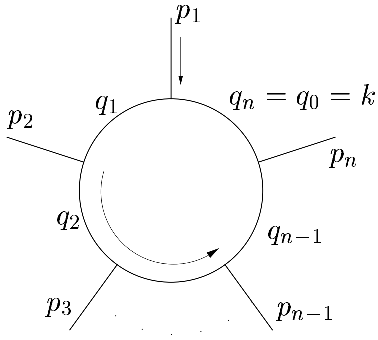



Abbildung 3.2: Bezeichnungen bei der Berechnung der N-Punkt-Funktionen. Alle externen Impulse werden als einlaufend gezählt.

teren werden die Bezeichnungen

$$q_i = k + r_i \quad \text{und} \tag{3.18}$$

$$r_i = \sum_{j=1}^{i} p_j, \quad r_0 = r_n = 0 \tag{3.19}$$

verwendet. Um die Übersichtlichkeit in den Ausdrücken zu erhöhen, verwende ich später auch die Notation

$$\langle f(k) \rangle_d = \frac{(2\pi\mu)^{4-d}}{i\pi^2} \int \mathrm{d}^d k f(k) \tag{3.20}$$

verwenden. Ausgehend von der Integration aus den Feynman-Regeln bedeutet diese Definition umgekehrt

$$\int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} f(k) = \frac{i\mu^{-(4-d)}}{16\pi^2} \langle f(k) \rangle_d \,, \tag{3.21}$$

und das skalare Integral $I_n^d$ kann geschrieben werden als

$$I_n^d(p_1, \ldots, p_n, m_1, \ldots, m_n) = \left\langle \frac{1}{\prod_{i=1}^n q_i} \right\rangle_d .$$

[2]bis auf Vorfaktoren, die sich aus den Vertizes ergeben

### 3.2.2 Feynman-Parametrisierung

Um diese Integrale zu vereinfachen bedient man sich der so genannten Feynman-Parametrisierung [PS95, 189ff]. Diese ermöglicht es, den Nenner des Integrals als Potenz eines quadratischen Polynoms in der Integrationsvariablen $k$ darzustellen. Dazu betrachtet man die folgende Identität

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(q_i^2 - m_i^2 + i\delta)} = \prod_{i=1}^{n} \left( \int_0^1 \mathrm{d}z_i \right) \frac{\delta(1 - \sum_{j=1}^{n} z_j)\,(n-1)!}{\left( \sum_{j=1}^{n} z_j (q_j^2 - m_j^2) + i\delta \right)^n}. \tag{3.22}$$

Der Nenner kann durch quadratische Ergänzung auf die Form $(\tilde{k}^2 - \tilde{m}^2)^n$ gebracht werden, mit

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= k + \sum_{i=1}^{n} z_i r_i \quad \text{und} \\ \tilde{m}^2 &= \left( \sum_{i=1}^{n} z_i r_i \right)^2 - \sum_{i=1}^{n} z_i (r_i^2 - m_i^2). \end{aligned}$$

Mit den Definitionen

$$\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^{\mathsf{T}}, \tag{3.23}$$

$$\int \mathrm{d}^n z = \prod_{i=1}^{n} \left( \int_0^1 \mathrm{d}z_i \right) \tag{3.24}$$

sowie $(n-1)! = \Gamma(n)$ kann man nach Substitution in (3.17) das Integral als

$$I_n^d = \frac{(2\pi\mu)^{4-d}}{i\pi^2} \Gamma(n) \int \mathrm{d}^n z \int \mathrm{d}^d \tilde{k} \frac{\delta(1 - \sum_{i=1}^{n} z_i)}{\left( \tilde{k}^2 - \tilde{m}^2 + i\delta \right)^n} \tag{3.25}$$

schreiben.

### 3.2.3 Wick-Rotation

Um das Differential $\mathrm{d}^d\tilde{k}$ zu bestimmen bedient man sich der Wick-Rotation, durch die man ein Differential $\mathrm{d}^d K$ in Euklid'scher Metrik erhält (Im Folgenden schreibe ich $k$ anstatt $\tilde{k}$). Das Integral kann dann in gewohnter Weise in Polarkoordinaten durch Trennung der Winkel- und Betragsintegration gelöst werden.

Man betrachte die Komponente $k_0$ des $d$-dimensionalen Vektors $k$ als komplexe Größe. Nach der Parametrisierung mit Feynman-Parametern wird deutlich, dass der Integrand nur Pole im zweiten und vierten Quadranten der komplexen $k_0$-Ebene besitzt. Also lässt sich der Integrationsweg wie in Abb. 3.3 über die imaginäre Achse und im Unendlichen des ersten und dritten Quadranten schließen, ohne dass dabei Pole umlaufen werden. Nach dem Jordan'schen Lemma liefert das Integral über die Wege im

Unendlichen keinen Beitrag, da hier der Regulator $\varepsilon$ als genügend große, endliche Größe betrachtet wird. Der Limes $\varepsilon \to 0$ wird erst gebildet, nachdem die Integration ausgeführt wurde. Also darf man mit Hilfe des Cauchy'schen Integralsatzes folgern, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k_0 f(k_0^2 - \mathbf{k}^2) = -\int_{+i\infty}^{-i\infty} \mathrm{d}k_0 f(k_0^2 - \mathbf{k}^2) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}K_0 f(-K_0^2 - \mathbf{K}^2) \tag{3.26}$$

ist, nachdem $k = (k_0, \mathbf{k})^\mathsf{T}$ mit $K = (-ik_0, \mathbf{k})^\mathsf{T} = (K_0, \mathbf{K})^\mathsf{T}$ substituiert wurde. Der Vektor $K$ ist dann ein Vektor in einem Vektorraum mit Euklid'scher Metrik. Das Integral (3.25) ist also gegeben durch

$$I_n^d = \frac{(2\pi\mu)^{4-d}}{\pi^2} \Gamma(n) \int \mathrm{d}^n z \int \mathrm{d}^d K \frac{\delta(1 - \sum_{i=1}^n z_i)}{(-K^2 - \tilde{m}^2 + i\delta)^n}, \tag{3.27}$$

wobei zu beachten ist, dass $K^2$ und $\mathrm{d}^d K$ bezüglich der Euklidischen Metrik zu bilden sind.

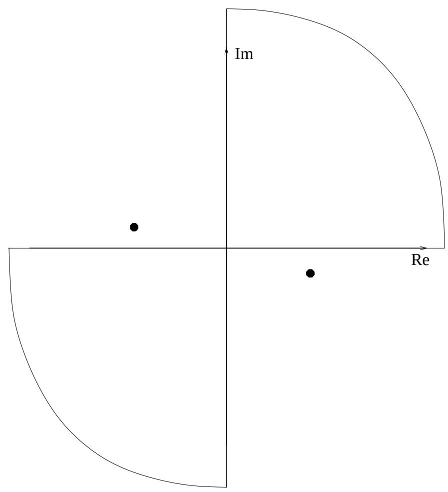



Abbildung 3.3: Der geschlossene Integrationsweg für das Integral über $k_0$. Das Schließen den Weges kann auch als Rotation der $k_0$-Achse um 90° aufgefasst werden. Die Pole liegen im zweiten und vierten Quadranten und bleiben von der Rotation unberührt.

### 3.2.4 Integration in Polarkoordinaten in $d$ Dimensionen

Da der Integrand von (3.27) nur von der Norm des Vektors abhängt, ist es vorteilhaft, die Raumintegration in Polarkoordinaten auszuführen. Der Raumwinkelanteil des Integrals kann sofort bestimmt werden, wenn die Funktionaldeterminante für $d$-dimensionale Polarkoordinaten bekannt ist. Diese mühsame Rechnung kann durch folgende Überlegung umgangen werden. Es ist bekannt ([BS91]), dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t e^{-t^2} = \sqrt{\pi} \tag{3.28}$$

Um ein $d$-dimensionales Volumen-Integral zu erhalten berechne man ([Bin04b])

$$\pi^{d/2} = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t e^{-t^2} \right)^d = \int \mathrm{d}^d x e^{|x|^2} = \int \mathrm{d}\Omega_d \int_0^{+\infty} \mathrm{d}r\, r^{d-1} e^{-r^2} \tag{3.29}$$

Da der Integrand vom Raumwinkel unabhängig ist, kann die Integration des Raumwinkels $\Omega_d = \int \mathrm{d}\Omega_d$ vom Radialanteil des Integrals separiert werden. Das verbleibende Integral löst man durch die Substitution $r^2 = \tau$,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}r\, r^{d-1} e^{-r^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \mathrm{d}\tau\, \tau^{d/2-1} e^{-\tau} = \frac{1}{2} \Gamma(d/2). \tag{3.30}$$

Letztlich erhält man also

$$\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}, \tag{3.31}$$

wodurch man mit (3.27) das gesuchte Integral $I_n^d$ vereinfacht zu

$$I_n^d = 2(-1)^n (2\sqrt{\pi}\mu)^{4-d} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(d/2)} \int \mathrm{d}^n z \delta(1 - \sum_{i=1}^{n} z_i) \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{d}r \frac{r^{d-1}}{(r^2 + \tilde{m}^2 - i\delta)^n}. \tag{3.32}$$

Um das verbleibende Integral

$$\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{d}r \frac{r^{d-1}}{(r^2 + \tilde{m}^2 - i\delta)^n} \tag{3.33}$$

zu lösen greift man auf die Betafunktion $B(x,y)$ zurück, für die gilt ([BS91, 331]):

$$B(x,y) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}t \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{3.34}$$

Damit erhält man für (3.33) durch die Substitution $\tau = r^2/(\tilde{m}^2 - i\delta)$

$$\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{d}r \frac{r^{d-1}}{(r^2 + \tilde{m}^2 - i\delta)^n} = \frac{1}{2} (\tilde{m}^2 - i\delta)^{d/2-n} B(\frac{d}{2}, n - \frac{d}{2}), \tag{3.35}$$

mit $B(d/2, n - d/2) = \Gamma(d/2)\Gamma(n - d/2)/\Gamma(n)$. Man löst also die Impulsintegration in $I_n^d$ vollständig, erhält dafür aber ein $n$-dimensionales Integral über die Feynman-Parameter $\mathbf{z}$

$$I_n^d = (-1)^n \Gamma(n - d/2) \int \mathrm{d}^n z \delta(1 - \sum_{i=1}^{n} z_i) \frac{(\tilde{m}^2 - i\delta)^{d/2-n}}{(4\pi\mu^2)^{d/2-2}}. \tag{3.36}$$

Der Term $i\delta$ kann für Ausdrücke, die für den Euklid'schen Bereich angegeben werden, entfallen.

### 3.2.5 Divergente Anteile der Integrale $I_n^d$

Die dimensionale Regularisierung wurde eingeführt, um in Strahlungskorrekturen auftretende Divergenzen in definierter Weise zu behandeln und so eine Renormierung der Theorie zu ermöglichen. Die Pole von $I_n^d$ sind die Pole der Gammafunktion. Mit

$$\epsilon = \frac{4-d}{2} \tag{3.37}$$

kann der Grenzwert $d \to 4$ durch $\epsilon \to 0$ ausgedrückt werden. Die Gammafunktion $\Gamma(x)$ besitzt einen Pol bei $x = 0$ und bei allen negativen ganzen Zahlen, denn für $\epsilon > 0$ gilt ([BS91], [Bin04b])

$$\begin{aligned}
\Gamma(\epsilon) &= \frac{1}{\epsilon} - \gamma_{\mathrm{E}} + \mathcal{O}(\epsilon), && (3.38)\\
\Gamma(-1+\epsilon) &= -\frac{\Gamma(\epsilon)}{1-\epsilon} = -\left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_{\mathrm{E}} + 1\right) + \mathcal{O}(\epsilon), && (3.39)\\
\Gamma(-n+\epsilon) &= -\frac{\Gamma(-(n-1)+\epsilon)}{n-\epsilon}, && (3.40)
\end{aligned}$$

wobei $\gamma_{\mathrm{E}} = -\Gamma'(1)$ die Euler'sche Konstante ist. Man sieht also, dass $\Gamma(n - d/2)$ nur für $n \leq d/2$ bzw. im vierdimensionalen Fall nur für $n = 1$ und $n = 2$ divergent ist.

Neben der Gammafunktion steckt die Abhängigkeit des Integrals $I_n^d$ von $\epsilon$ auch im Faktor

$$\left(\frac{\tilde{m}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\epsilon} = 1 - \epsilon \cdot \ln\left(\frac{\tilde{m}^2}{4\pi\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{3.41}$$

Zusammenfassend ergibt sich also

$$\begin{aligned}
\Gamma(\epsilon)\left(\frac{\tilde{m}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\epsilon} &= \Delta - \ln\left(\frac{\tilde{m}^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon) && (3.42)\\
\Gamma(-1+\epsilon)\left(\frac{\tilde{m}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\epsilon} &= -\Delta + \ln\left(\frac{\tilde{m}^2}{\mu^2}\right) - 1 + \mathcal{O}(\epsilon) && (3.43)\\
& && (3.44)
\end{aligned}$$

wobei $\Delta \equiv 1/\epsilon - \gamma_{\mathrm{E}} + \ln(4\pi)$ verwendet wurde. Damit lassen sich die divergenten Anteile von $I_1^4$ und $I_2^4$ angeben,

$$\begin{aligned}
I^4_{1,\mathrm{div}}(p_1, m_1) &= m_1^2\Delta \quad \text{und} && (3.45)\\
I^4_{2,\mathrm{div}}(p_1, p_2, m_1, m_2) &= \Delta. && (3.46)
\end{aligned}$$

Vergleicht man diese Ergebnisse mit einer Berechnung durch Pauli-Villars-Regularisierung, so erkennt man, dass das Integral $I_1^4$ quadratische Divergenzen [PS95, 257] und das Integral $I_2^4$ nur logarithmische Divergenzen enthält [PS95, 194].

## 3.3 Reduktion der Tensorintegrale

### 3.3.1 Überblick über Methoden der Tensorreduktion

Neben den skalaren Integralen $I_n^d$ können auch sogenannte Tensorintegrale $I_n^{d,\mu_1\mu_2\ldots\mu_m}$ auftreten[3],

$$I_{n+1}^{d,\mu_1\mu_2\ldots\mu_m}(p_1,\ldots,p_n) = \frac{(2\pi\mu)^{4-d}}{i\pi^2}\int \mathrm{d}^d k \frac{k^{\mu_1}k^{\mu_2}\cdots k^{\mu_m}}{k^2-m^2}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(k+p_i)^2-m^2}. \tag{3.47}$$

Diese lassen sich allerdings auf Tensorintegrale niedereren Ranges und skalare Integrale zurückführen. Mit der Passarino-Veltman-Methode [PV79] ist dies, zumindest theoretisch, für Tensorintegrale beliebigen Ranges möglich. Da dieser Algorithmus nur für wenige spezielle Integrale Anwendung fand, soll er hier nur kurz skizziert werden. Eine sehr elegante und zumeist übersichtlichere Methode arbeitet mit Projektionsoperatoren und vermeidet das Auftreten großer linearer Gleichungssysteme.

Die der Passarino-Veltman-Methode zu Grunde liegende Idee ist, dass die Indexstruktur eines Tensorintegrals nur von den externen Impulsen $p_i^\mu$ und dem metrischen Tensor $g^{\mu\nu}$ getragen werden kann. Dies führt auf einen Ansatz, der auch Ausgangspunkt für die weiter unten beschriebene Projektormethode ist und dort an Beispielen verdeutlicht wird. Im Gegensatz zur Projektormethode wird bei der Passarino-Veltman-Methode durch Kontraktion von (3.47) mit allen möglichen Kombinationen von $p_i^\mu$ und $g^{\mu\nu}$ ein lineares Gleichungssystem für die zu bestimmenden skalaren Koeffizienten des Ansatzes generiert, dessen nicht-numerische Lösung in der Praxis schnell zu komplex wird, um in vertretbarem Zeitaufwand berechnet zu werden.

Eine weitere Methode zur Tensorreduktion [Bin04a] verwendet Projektionsoperatoren und soll hier an zwei Beispielen vorgeführt werden, deren Ergebnisse für die Einschleifenrenormierung benötigt werden. Die auftretenden Projektoren sind in [Bin04a] angegeben und von dort übernommen.

Zur besseren Übersichtlichkeit werden folgende Kurzschreibweisen eingeführt

$$\Pi(p) \equiv (k+p)^2 - m^2 + i\delta, \tag{3.48}$$
$$\Pi_j(p) \equiv (k+p)^2 - m_j^2 + i\delta, \tag{3.49}$$
$$\not{\Pi}(p) \equiv \not{k} + \not{p} + m, \tag{3.50}$$
$$\tag{3.51}$$

wobei das Symbol $k$ für die jeweils auftretende Integrationsvariable reserviert ist.

### 3.3.2 Berechnung von $I_2^{d,\mu}$

Bei der Berechnung des Integrals $I_2^{d,\mu}(p)$ wird der Unterschied zwischen der Passarino-Veltman-Methode und der Projektormethode nicht deutlich, da nur ein unbekannter

[3] Da im Wess-Zumino-Modell alle Massen identisch sind, werden im Folgenden die Massen in den Argumenten der Integrale weggelassen und $m_0,\ldots,m_n$ durch $m$ ersetzt.

Koeffizient auftritt. Die einzige Größe, die die Tensorstruktur des Integrals tragen kann ist der Impuls $p^\mu$. Also lautet der Ansatz

$$I_2^{d,\mu}(p) = p^\mu \cdot C_1^{2,1} = \left\langle \frac{k^\mu}{\Pi(0)\Pi(p)} \right\rangle_d \tag{3.52}$$

mit dem noch unbekannten Koeffizienten $C_1^{2,1}$. Kontrahiert man beide Seiten der Gleichung mit $p_\mu/(p)^2$, so erhält man die Lösung für den Koeffizienten

$$C_1^{2,1} = \frac{p_\mu}{(p)^2} I_2^{d,\mu}(p) = \frac{1}{(p)^2} \left\langle \frac{p \cdot k}{\Pi(0)\Pi(p)} \right\rangle_d \tag{3.53}$$

Der Zähler kann nun zu einer Summe von Propagatoren ergänzt werden, so dass durch gliedweises Kürzen einfachere Standardintegrale entstehen.

$$p \cdot k = \frac{1}{2}\left((p+k)^2 - m^2 - k^2 + m^2 - p^2\right) = \frac{1}{2}\left(\Pi(p) - \Pi(0) - p^2\right)$$

$$C_1^{2,1} = \frac{1}{2(p)^2}\Big(I_1^d(m) - I_1^d(m) - p^2 I_2^d(p,m)\Big) = -\frac{1}{2} I_2^d(p,m)$$

Das Zweipunkttensorintegral vom Rang eins ist also gerade ein Vielfaches vom skalaren Zweipunktintegral $I_2^d$.

### 3.3.3 Berechnung von $I_3^{d,\mu}$

Es soll nun gezeigt werden, dass das Integral $I_3^{d,\mu}(r_1, r_2)$ keine Divergenzen besitzt. Für das Integral kann der Ansatz

$$I_3^{d,\mu}(p_1,p_2) = \left\langle \frac{k^\mu}{\Pi(0)\Pi(r_1)\Pi(r_2)} \right\rangle_d = r_1^\mu \cdot C_1^{3,1} + r_2^\mu \cdot C_2^{3,1} \tag{3.54}$$

gemacht werden. Die beiden Operatoren [Bin04a]

$$\mathcal{R}_1^\mu = \eta \cdot ({r_2}^2 r_1^\mu - (r_1 \cdot r_2) r_2^\mu, \tag{3.55}$$

$$\mathcal{R}_2^\mu = \eta \cdot ({r_1}^2 r_2^\mu - (r_1 \cdot r_2) r_1^\mu \tag{3.56}$$

mit $\eta^{-1} = {r_1}^2 {r_2}^2 - (r_1 \cdot r_2)^2$ sind die gesuchten Projektoren mit der Eigenschaft

$$\mathcal{R}_{1,\mu} I_3^{d,\mu} = C_1^{3,1}, \tag{3.57}$$

$$\mathcal{R}_{2,\mu} I_3^{d,\mu} = C_2^{3,1}. \tag{3.58}$$

Angewandt auf das Integral ergibt sich im Zähler eine Summe von Skalarprodukten, die sich leicht zu Propagatoren ergänzen lassen

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{1,\mu} I_3^{d,\mu} &= \eta \left\langle \frac{{r_2}^2(k \cdot r_1) - (r_1 \cdot r_2)(k \cdot r_2)}{\Pi(0)\Pi(r_1)\Pi(r_2)} \right\rangle_d \\
&= \frac{\eta}{2} \left\langle \frac{{r_2}^2(\Pi(r_1) - \Pi(0) - r_1^2) - (r_1 \cdot r_2)(\Pi(r_2) - \Pi(0) - {r_2}^2)}{\Pi(0)\Pi(r_1)\Pi(r_2)} \right\rangle_d \\
&= \frac{\eta}{2} \Big( {r_2}^2 (I_2^d(r_2) - I_2^d(r_2 - r_1) - {r_1}^2 I_3^d(p_1,p_2)) \\
&\quad - (r_1 \cdot r_2)(I_2^d(r_1) - I_2^d(r_2 - r_1) - {r_2}^2 I_3^d(p_1,p_2)) \Big) .
\end{aligned}$$

Also erhält man

$$
\begin{aligned}
C_1^{3,1} &= \frac{\eta}{2}\Big\{{r_2}^2 I_2^d(r_2) - ({r_2}^2 - r_1\cdot r_2) I_2^d(r_2 - r_1) \\
&\qquad\qquad - {r_2}^2({r_1}^2 - r_1\cdot r_2) I_3^d(p_1,p_2) - (r_1\cdot r_2) I_2^d(r_1)\Big\} \\
&= \frac{\eta}{2}\Big\{{r_2}^2\left(I_2^d(p_1+p_2) - I_2^d(p_2)\right) \\
&\qquad + (r_1\cdot r_2)\left(I_2^d(p_2) - I_2^d(p_1+p_2)\right) + {r_2}^2\left({r_1}^2 - r_1\cdot r_2\right) I_3^d(p_1,p_2)\Big\}
\end{aligned}
\tag{3.59}
$$

Analog ergibt sich der Ausdruck für $C_2^{3,1}$ durch Vertauschen von $r_1$ und $r_2$.

Da die Divergenzen der Integrale $I^d_{2,\mathrm{div}}(p) = \Delta$ unabhängig vom Impuls $p$ sind, erkennt man sofort, dass sich in jedem der beiden Koeffizienten $C_1^{3,1}$ und $C_2^{3,1}$ die divergenten Anteile, die aus den Integralen $I_2^d$ entstehen, gerade aufheben.

## 3.4 Separation von IR-Polen in masselosen $n$-Punkt-Integralen

### 3.4.1 Bestimmung des infraroten Divergenzverhaltens

Neben den ultravioletten Divergenzen, die durch die Renormierung behoben werden, treten im masselosen Fall auch infrarote Pole auf. Wir betrachten das Integral

$$
\mathcal{A} = \int \mathrm{d}^n k \frac{f(k^\mu, r_1, \ldots, r_n)}{(k-r_1)^2(k-r_2^2)\cdots(k-r_n)^2}. \tag{3.60}
$$

Man unterscheidet zwei Arten von infraroten Divergenzen. Von einem *weichen Infrarotpol* spricht man, wenn im Grenzfall $k \to r_i$, also für $q_i \to 0$, Integrand divergiert. Wegen der hohen Symmetrie der in dieser Arbeit auftretenden Probleme, genügt es meist das Divergenzverhalten für einen Impuls zu betrachten. Wählt man z. B.den Propagator $q_n$ aus, so vereinfacht sich der zu betrachtende Grenzwert wegen $r_n = 0$ zu

$$
\frac{f(\lambda k^\mu, r_1, \ldots, r_n)}{(\lambda k - r_1)^2(\lambda k - r_2)^2\cdots(\lambda k - r_n)^2} \propto \lambda^{-l} \stackrel{\lambda\to 0}{\longrightarrow} \pm\infty, \tag{3.61}
$$

wenn $l > 0$ ist. Im Allgemeinen verbessert die Funktion $f$ den Divergenzgrad des Integrals, wenn die Funktion selbst Nullstellen bei $\lambda = 0$ besitzt.

Der zweite Fall von Infrarotpolen ist die *kollineare Divergenz*, die auftreten kann, wenn der Integrationsimpuls zu einem in einem der Propagatoren vorkommenden Impuls, z. B. $r_1$, kollinear wird. Zur Untersuchung des kollinearen Divergenzverhaltens bringt man $k$ in die sogenannte Sudakov-Parametrisierung

$$
k^\mu = z r_1^\mu + \frac{k^2 - \lambda^2 k_T^2}{2 z r_1^\nu n_\nu} n^\mu + \lambda k_T^\mu. \tag{3.62}
$$

Dabei ist $n$ ein lichtartiger Vierervektor ($n^\mu n_\mu = 0$) und $k_T$ die Komponente von $k$, die sowohl zu $n$ als auch zu $r_1$ orthogonal ist. Eine kollineare Divergenz tritt auf, wenn sowohl $r_1$ als auch $k$ lichtartig sind und der Limes $\lambda \to 0$ gebildet wird. Pole durch kollineare Divergenzen können, wie auch die weichen Pole, für jeden lichtartigen Impuls $r_i$ auftreten.

In [BGH00] wird gezeigt, dass die skalaren Integrale $I_n^d(p_1, \ldots, p_n, m_1, \ldots, m)$ durch Reduktionsformeln in einen Polanteil und einen IR-divergenzfreien Anteil zerlegt werden können,

$$I_n^d = I_{\text{div}} + I_{\text{fin}}. \tag{3.63}$$

### 3.4.2 Herleitung der Reduktionsformeln für Skalarintegrale

Als Ausgangspunkt für die Reduktion[4] schreibt man das Integral $I_n^d$ als

$$I_n^d(r_1, \ldots, r_n) = \mathcal{N} \int \mathrm{d}^d k \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i{}^2} = \mathcal{N} \int \mathrm{d}^d k \frac{\sum_{j=1}^n b_j q_j^2}{\prod_{i=1}^n q_i{}^2} + \mathcal{N} \int \mathrm{d}^d k \frac{1 - \sum_{j=1}^n b_j q_j^2}{\prod_{i=1}^n q_i{}^2}, \tag{3.64}$$

wobei $\mathcal{N} = (2\pi\mu)^{4-d}/i\pi^2$ ist, und die beiden Terme in dieser Reihenfolge $I_{\text{div}}$ und $I_{\text{fin}}$ entsprechen. Das Ziel ist es nun, Bedingungen für die Koeffizienten $b_j$ zu finden, so dass das Integral $I_{\text{fin}}$ keine IR-Pole mehr enthält. Dafür erweist sich die Darstellung (3.25) als angebracht; es gilt allerdings zu berücksichtigen, dass die quadratische Ergänzung $k \to \tilde{k} = k + \sum_{i=1}^n z_i r_i$ auch eine Modifikation von $q_i$ induziert. Man erhält so

$$I_{\text{fin}} = \mathcal{N}\Gamma(n) \int \mathrm{d}^n z \delta(1 - \sum_{i=1}^{n} z_i) \int \mathrm{d}^d \tilde{k} \frac{1 - \sum_{j=1}^n b_j \tilde{q}_j^2}{\left(\tilde{k}^2 - \tilde{m}^2\right)^n} \tag{3.65}$$

mit den Größen

$$\tilde{m}^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} z_i r_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} z_i r_i{}^2 \quad \text{und} \tag{3.66}$$

$$\tilde{q}_j = \tilde{k} - \sum_{i=1}^{n} (z_i - \delta_{ij}) r_i. \tag{3.67}$$

Zur weiteren Auswertung wird der Ausdruck $\tilde{q}_j^2$ vereinfacht[5]

$$\begin{aligned} \tilde{q}_j^2 &= \tilde{k}^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} (z_i - \delta_{ij}) r_i\right)^2 \\ &= \tilde{k}^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} z_i r_i - r_j\right)^2 \\ &= \tilde{k}^2 + r_j{}^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} z_i r_i\right)^2 - 2\sum_{i=1}^{n} z_i r_i r_j \end{aligned} \tag{3.68}$$

[4] vgl. [BGH00]

[5] Das doppelte Produkt verschwindet unter dem Integral, da im doppelten Produkt $k$ nur linear vorkommt und $\int \mathrm{d}^d k k^\mu f(k^2)$ verschwindet.

Weitere Vereinfachungen ergeben sich, wenn man die Gram-Matrix $G$, mit $G_{ij} = 2r_i r_j$, und die Matrix $S$,

$$S_{ij} = -\frac{1}{2}\left(r_j - r_i\right)^2 = \frac{1}{2}\left(G_{ij} - \frac{G_{ii} + G_{jj}}{2}\right) \tag{3.69}$$

einführt. Dann ist wegen $\sum_{i=1}^{n} z_i = 1$

$$\begin{aligned} \tilde{q}_j^2 &= \tilde{k}^2 + \tilde{m}^2 + \sum_{i=1}^{n} z_i {r_i}^2 + \sum_{i=1}^{n} z_i {r_j}^2 - 2\sum_{i=1}^{n} z_i r_i r_j \\ &= \tilde{k}^2 + \tilde{m}^2 - 2(\mathbf{z}^{\mathsf{T}} S)_j. \end{aligned} \tag{3.70}$$

Mit den Definitionen $B = \sum_{j=1}^{n} b_j$, $\mathbf{b}^{\mathsf{T}} = (b_1, \ldots, b_n)$ und dem Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $a_j = -1/2$, $j = 1, \ldots, n$ bringt man den Zähler des Impulsraumintegrals von $I_{\text{fin}}$ vollständig in Vektor- und Matrixschreibweise,

$$1 - \sum_{j=1}^{n} b_j \tilde{q}_j^2 = -(\tilde{k}^2 + \tilde{m}^2)B + 2\mathbf{z}^{\mathsf{T}}(S\mathbf{b} - \mathbf{a}). \tag{3.71}$$

Wählt man nun die $b_j$ gerade als die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$S\mathbf{b} = \mathbf{a}, \tag{3.72}$$

so besitzt das Integral $I_{\text{fin}}$ keine IR-Pole, wie später gezeigt wird. Daneben bleibt noch zu zeigen, dass (3.72) stets eine Lösung besitzt, die jedoch nicht notwendigerweise eindeutig sein muss.

Für die vorliegende Arbeit genügt es, die Existenz der Lösung für die benötigten Fälle durch Inversion der Matrix $S$ zu zeigen, obwohl auch ein allgemeiner Beweis möglich wäre. Man kann nämlich zeigen [BGH00], dass in nicht-exzeptioneller Kinematik der Rang der Matrix $S$, $\text{rg}(S) = \min\{n, 6\}$ ist. Damit existiert stets eine Lösung für $\mathbf{b}$, die allerdings für $n > 6$ nicht eindeutig ist.

Unter Verwendung von (3.72) vereinfacht sich $I_{\text{fin}}$ zu

$$I_{\text{fin}} = -\mathcal{N} B \Gamma(n) \int \mathrm{d}^n z \delta(1 - \sum_{i=1}^{n} z_i) \int \mathrm{d}^d \tilde{k} \frac{(\tilde{k}^2 + \tilde{m}^2)}{\left(\tilde{k}^2 - \tilde{m}^2\right)^n}. \tag{3.73}$$

Führt man mit diesem Integral nun die Schritte von Kapitel 3.2.3 und 3.2.4 durch, nachdem man den Integranden zerlegt hat in

$$\frac{\tilde{k}^2 + \tilde{m}^2}{(\tilde{k}^2 - \tilde{m}^2)^n} = \frac{1}{(\tilde{k}^2 - \tilde{m}^2)^{n-1}} + 2\tilde{m}^2 \frac{1}{(\tilde{k}^2 - \tilde{m}^2)^n}, \tag{3.74}$$

so erhält man das einfache Resultat

$$I_{\text{fin}} = -(n - d - 1)B \cdot 4\pi\mu^2 I_n^{d+2}(r_1, \ldots, r_n). \tag{3.75}$$

Insgesamt kann man also die Reduktionsformeln für $n \leq 6$ zusammenfassend schreiben als

$$I_n^d = \sum_{l=1}^{n} (S^{-1}\mathbf{a})_l I_{n-1,l}^d - (n-d-1)B \cdot 4\pi\mu^2 I_n^{d+2}. \tag{3.76}$$

Dabei ist $I_{n-1,l}^d$ definiert durch

$$I_{n-1,l}^d(p_1,\ldots,p_n,m_1,\ldots,m_n) \equiv \left\langle \frac{1}{\Pi_1(r_1)\Pi_2(r_2)\cdots\Pi_{l-1}(r_{l-1})\Pi_{l+1}(r_{l+1})\cdots\Pi_n(r_n)} \right\rangle_d \tag{3.77}$$

Durch ‚Power Counting' findet man, dass das Integral $I_n^{d+2}$ IR-konvergent ist. Zuerst überprüft man den weichen Limes, d. h. man ersetzt $k$ durch $\lambda k$ [BGHS01] und bildet den Grenzwert $\lambda \to 0$. Man erhält dann:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^D k &\mapsto \lambda^D \mathrm{d}^D k, && (3.78)\\
q_1^2 &\mapsto (\lambda k + r_1)^2 = (\lambda k + p_1)^2 = 2\lambda(kp_1) + \mathcal{O}(\lambda^2), && (3.79)\\
q_{n-1}^2 &\mapsto (\lambda k + r_{n-1})^2 = (\lambda k - p_n)^2 = -2\lambda k p_n + \mathcal{O}(\lambda^2), && (3.80)\\
q_n^2 &\mapsto (\lambda k + r_n)^2 = \lambda^2 k^2, \text{ wegen } r_n = 0, && (3.81)\\
q_j^2 &\mapsto r_j^2 + \mathcal{O}(\lambda), \quad \forall j = 2,\ldots,n-2. && (3.82)
\end{aligned}$$

Mit diesen Ersetzungen wird für kleine $\lambda$ das Integral proportional zu

$$I_n^D \propto \lambda^{D-4} \int \mathrm{d}^D k \frac{1}{(kp_1)r_2^2\cdots r_{n-2}^2(kp_n)k^2}, \tag{3.83}$$

also konvergent für $D > 4$ und divergent für $D \leq 4$.

Die zweite Möglichkeit für Infrarotpole sind kollineare Divergenzen. Diese können auftreten, wenn im masselosen Fall der Integrationsimpuls $k$ kollinear mit einem der Impulse $r_i$ wird, also z. B. $k = zr_1, z \in \mathbb{R}$, was unter anderem bedeutet, dass $k^2 = 0$, also $k$ lichtartig wird. Um diesen Fall zu untersuchen bringt man $k$ in die Parametrisierung [BGHS01]

$$k = zp_1 + \lambda k_T - \frac{\lambda^2 k_T^2}{2z(p_1 p_n)} p_n, \tag{3.84}$$

wobei $k_T$ so definiert wird, dass $k_T p_1 = k_T p_n = 0$ ist. Dann kennzeichnet der Übergang $\lambda \to 0$ den kollinearen Limes. Da für $k^2 = 0$ der Nenner unabhängig davon, ob $k$ kollinear mit $p_1$ ist; diese sind von $\lambda$ unabhängig und spiegeln nicht das zu untersuchende Verhalten wieder. Wählt man $p_1 = E_1 \cdot (1,0,0,1)$, was keine Einschränkung darstellt, so erhält man

$$\begin{aligned}
{q_1}^2 &= -\lambda^2 \frac{k_T^2}{z} && (3.85)\\
{q_n}^2 &= k^2, && (3.86)\\
\mathrm{d}^D k &= \mathrm{d}k^0 \mathrm{d}k^3 \lambda^{D-2} \mathrm{d}^{D-2} k_T, && (3.87)
\end{aligned}$$

und alle anderen $q_j^2$ regulär für $\lambda \to 0$. Dann kann man das Integral $I_n^D$ schreiben als

$$I_n^D \propto \int \mathrm{d}k^0 \mathrm{d}k^3 \mathrm{d}^{D-2} k_T \left( \frac{\lambda^{D-2}}{\lambda^2 k_T^2 {q_2}^2 \cdots {q_{n-1}}^2} \right) \frac{1}{k^2} \propto \lambda^{D-4}. \tag{3.88}$$

Man erhält also die gleiche Dimensionsabhängigkeit, wie bereits im Fall weicher IR-Pole, nämlich Konvergenz für $D > 4$ und einen Pol für $D \geq 4$. Damit sind alle $6 - 2\varepsilon$-dimensionalen Integrale infrarot endlich.

Zu bemerken bleibt, dass für den speziellen Fall $n = 5$ das Integral $I_n^{d+2}$ nicht auftaucht, da $(n - d - 1) = \mathcal{O}(\epsilon)$ ist, was für phänomenologische Anwendungen weggelassen werden kann[6].

Ein wichtiger Zusammenhang zwischen der Summe der Koeffizienten $B$ und der Determinante $\det \tilde{G}$ der reduzierten Gram-Matrix

$$\tilde{G} \equiv (2 r_i r_j)_{i,j=1}^{n-1} \tag{3.89}$$

soll im Folgenden eingeführt werden. Dazu betrachten wir das Gleichungssystem (3.72) und schreiben es als

$$\sum_{j=1}^{n} \left( G_{ij} - r_i^2 - r_j^2 \right) b_j = -\frac{1}{2}, \quad \forall i = 1, \ldots, n. \tag{3.90}$$

Man erkennt nun leicht, dass die Gleichungen jeweils aus einem von $i$ abhängigen und einem unabhängigen Anteil bestehen. Verwendet man zusätzlich die Bedingung $r_n = 0$ aus der Impulserhaltung[7], so kann man das Gleichungssystem zerlegen in

$$\sum_{j=1}^{n-1} \tilde{G}_{ij} b_j = r_i^2 B \quad \text{und} \tag{3.91}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} r_j^2 b_j = 1. \tag{3.92}$$

Für das Gleichungssystem (3.91) ergibt sich jedoch eine Lösbarkeitsbedingung, die gleichzeitig die gesuchte Relation ist[8],

$$B = 0 \Leftrightarrow \det \tilde{G} = 0. \tag{3.93}$$

Diese Gleichung bedingt, dass z. B. im Fall $n = 6$ für $d = 4$ der Anteil $I_{\text{fin}}$ verschwindet, denn in diesem Fall ist die Menge $\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}$ linear abhängig und somit besitzt auch $\tilde{G}$ nicht vollen Rang.

[6]Dieser Term spielt jedoch eine Rolle, wenn das Integral in einem Produkt zusammen mit $1/\varepsilon$ auftaucht.
[7]Damit sind auch $G_{in} = G_{nj} = 0$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$.
[8]Die triviale Lösung $\mathbf{b} = 0$ erfüllt zwar (3.91), jedoch nicht (3.92).

### 3.4.3 Anwendung der Reduktionsformeln

Zunächst wird die Reduktionsformel für $I_4^d$ berechnet, wobei $p_1$ und $p_2$ off-shell und die anderen zwei Beine lichtartig angenommen werden. Es zeigt sich nämlich, dass diese Boxintegrale durch die Reduktion höherer Integrale wieder erzeugt werden. Die Matrix $S$ lautet dann

$$S = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & s_2 & s_{14} & s_1 \\ s_2 & 0 & 0 & s_{12} \\ s_{14} & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & s_{12} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.94}$$

und als Lösung des Gleichungssystems (3.72) erhält man

$$\mathbf{b} = -\frac{1}{\mathrm{tr}(p_1,p_2,p_3,p_4)}\begin{pmatrix} \mathrm{tr}(p_3,p_4) \\ \mathrm{tr}(p_4,p_1) \\ 4\frac{s_1 s_2}{s_{14}} + \mathrm{tr}(p_1,p_2) \\ \mathrm{tr}(p_2,p_3) \end{pmatrix}. \tag{3.95}$$

Man sieht also, dass das Ergebnis allein durch zyklische Spuren darstellbar ist, sobald nur maximal ein Bein off-shell ist. in ähnliches Ergebnis erhält man für $B$,

$$B = -\frac{1}{\mathrm{tr}(p_1,p_2,p_3,p_4)}\left(\mathrm{tr}(p_{13},p_{24}) + 4\frac{s_1 s_2}{s_{14}}\right). \tag{3.96}$$

Das Ergebnis für die Reduktion des Boxdiagramms mit zwei benachbarten Beinen off-shell[9] lautet also, nach dem der gemeinsame Vorfaktor auf die linke Seite gebracht wurde

$$\begin{aligned} -\,\mathrm{tr}(p_1,p_2,p_3,p_4) I_4^d \;&=\; -\,(3-d)\left(\mathrm{tr}(p_{13},p_{24}) + \frac{s_1 s_2}{s_{14}}\right) 4\pi\mu^2 I_4^{d+2}(p_1,p_2,p_3,p_4) \\ &+\; \mathrm{tr}(p_2,p_3) I_3^d(p_{41},p_2,p_3) \\ &+\; \mathrm{tr}(p_3,p_4) I_3^d(p_{12},p_3,p_4) \\ &+\; \mathrm{tr}(p_4,p_1) I_3^d(p_{23},p_4,p_1) \\ &+\; \left(\mathrm{tr}(p_1,p_2) + 4\frac{s_1 s_2}{s_{14}}\right) I_3^d(p_{34},p_1,p_2). \end{aligned} \tag{3.97}$$

Wertet man die hier vorkommenden Integrale explizit aus, so gelangt man zu der im Anhang wiedergegebenen Darstellung (8.37).

[9] Hier: $p_1$ und $p_2$

# 4 Renormierung

## 4.1 Das Nicht-Renormierungs-Theorem

Die Methode der Super-Graphen liefert ein Hilfsmittel, um Renormierungs-Eigenschaften supersymmetrischer Theorien zu bestimmen[WB92, S. 61ff.]. Eines der wichtigsten Ergebnisse, das mit Hilfe der Methode der Super-Graphen gezeigt werden kann, ist das Nicht-Renormierungs-Theorem (NRT) [BL94, S. 45]:

> Das Superpotential (einer $\mathcal{N} = 1$ supersymmetrischen Theorie) wird, außer um endliche Beiträge, in jeglicher störungstheoretischen Ordnung *nicht* renormiert, es sei denn durch Wellenfunktions-Renormierung.

Einen sehr einfachen Beweis für dieses Theorem, der auf den Einsatz von Supergraphen weitestgehend verzichtet, führt Seiberg [Sei94] ausgehend von Holomorphieargumenten. Dazu betrachtet er zunächst die Symmetrien der Wirkung

$$\mathcal{S} = \int \mathrm{d}\hat{\Sigma} \left\{ \mathbf{\Phi}^\dagger \mathbf{\Phi} + \bar{\theta}\bar{\theta} \left( \frac{m}{2} \mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi} + \frac{g}{3} \mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi} \right) + \theta\theta \left( \frac{m}{2} \mathbf{\Phi}^\dagger \mathbf{\Phi}^\dagger + \frac{g}{3} \mathbf{\Phi}^\dagger \mathbf{\Phi}^\dagger \mathbf{\Phi}^\dagger \right) \right\}. \tag{4.1}$$

Das Superpotential $\mathcal{V}(\mathbf{\Phi})$,

$$\mathcal{V}(\mathbf{\Phi}) = \frac{m}{2} \mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi} + \frac{g}{3} \mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}, \tag{4.2}$$

ist eine holomorphe Funktion von $\mathbf{\Phi}$. Die Wirkung $\mathcal{S}$ ist invariant unter einer $\mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1)_R$-Symmetrie. Dabei versteht man unter einer $\mathbf{U}(1)_R$-Symmetrie eine durch einen kontinuierlichen Parameter $\alpha$ parametrisierte, kontinuierliche $\mathbf{U}(1)$-Symmetrie, unter der die Superraumkoordinaten $\theta$ das Transformationsverhalten

$$\theta \to e^{i\alpha} \theta \tag{4.3}$$

besitzen, die Felder $\mathbf{\Phi}$ sich jedoch transformieren wie

$$\mathbf{\Phi} \to e^{iR(\mathbf{\Phi})\alpha} \mathbf{\Phi}, \tag{4.4}$$

wobei $R(\mathbf{\Phi})$ die sogenannte $R$-Ladung des Feldes ist [BL94]. Die Ladungen bezüglich der $\mathbf{U}(1)$-Symmetrie werden mit $Q$ bezeichnet.

Für den Beweis des NRT betrachtet man auch die Parameter $m$ und $g$ als Felder. Dies ist durch die Stringtheorie motiviert, da diese Parameter als Vakuumerwartungswerte von Feldern auftreten.

Legt man die Ladungen des Superfelds $\mathbf{\Phi}$ fest,

$$Q_{\mathbf{\Phi}} \equiv 1, \quad R(\mathbf{\Phi}) \equiv 1, \tag{4.5}$$

so folgen daraus die Ladungen der anderen beiden Felder, nämlich

$$Q_m + 2Q_{\mathbf{\Phi}} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_m = -2, \tag{4.6}$$
$$Q_g + 3Q_{\mathbf{\Phi}} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_g = -3, \tag{4.7}$$
$$R(m) + 2R(\mathbf{\Phi}) = 2R(\theta) = 2 \quad \Rightarrow \quad R(m) = 0, \tag{4.8}$$
$$R(g) + 3R(\mathbf{\Phi}) = 2R(\theta) = 2 \quad \Rightarrow \quad R(g) = -1. \tag{4.9}$$

Der Beweis setzt voraus [Sei93], dass sowohl die Holomorphie, als auch die Symmetrien sich auf das effektive Superpotential $\mathcal{V}_{\text{eff}}$ fortsetzen. Dann erzwingen die Gleichungen (4.6–4.9) für das effektive Superpotential die einzig mögliche Form

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}(\mathbf{\Phi}, m, g) = \int \mathrm{d}^4x \mathrm{d}^2\theta m \mathbf{\Phi}^2 f\left(\frac{g\mathbf{\Phi}}{m}\right), \tag{4.10}$$

denn $g\mathbf{\Phi}/m$ bildet ein Singulett unter einer $\mathbf{U}(1) \times \mathbf{U}(1)_R$-Transformation[1].

Da das effektive Potential andererseits das erzeugende Funktional für die 1-Teilchen-irreduziblen Diagramme[2] ist und für kleine Kopplungen $g$ eine Störungsentwicklung sinnvoll ist, kann man das effektive Potential auch als Entwicklung schreiben,

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}(\mathbf{\Phi}, m, g) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{g^n \mathbf{\Phi}^{n+2}}{m^{n-1}}. \tag{4.11}$$

Die Entwicklungsterme repräsentieren, da für die Supergraphen nur Propagatoren und Dreiervertizes existieren, ausschließlich Baum-Diagramme mit $n+2$ äußeren Feldern, $n$ Vertizes und $n-1$ Propagatoren. Dass die Exponenten dieser Felder gerade einem Baumdiagramm entsprechen, sieht man leicht ein, wenn man als repräsentatives Baumdiagramm ein lineares ohne Verzweigungen betrachtet (vgl. Abb. 4.1).

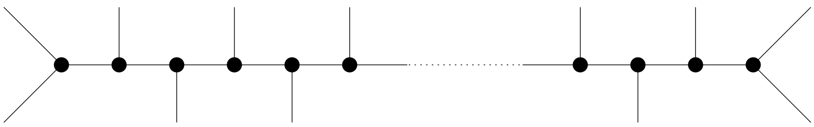


Abbildung 4.1: Einfacher Baumsupergraph

Da mit dem ersten und letzten Vertex zwei, ansonsten je ein äußeres Superfeld verbunden sind, muss die Anzahl der Vertizes um zwei geringer sein als die der äußeren Felder. Um andererseits $n$ Vertizes ohne geschlossene Wege zu verbinden, benötigt man

[1] Es ist sowohl die $R$-Ladung $R(g\mathbf{\Phi}/m) = 0$ als auch die $\mathbf{U}(1)$-Ladung $Q = 0$.

[2] 1-Teilchen-irreduzibel sind alle Diagramme, die nicht durch zerschneiden eines Propagators in zwei Teildiagramme zerfallen.

$n-1$ Propagatoren. Alle anderen Baumdiagramme mit $n+2$ äußeren Felder kann man aus genau dieser Anzahl von Propagatoren und Vertizes aufbauen.

Der letzte Beweisschritt verwendet, dass das effektive Potential das erzeugende Funktional für die 1-Teilchen-irreduziblen Diagramme ist, die angegebene Entwicklung andererseits aber ausschließlich reduzible Baumdiagramme erzeugt. Dieser Widerspruch zeigt also, dass keine Schleifenkorrekturen zum effektiven Superpotential beitragen können, das Superpotential also nicht renormiert wird.

## 4.2 Einschleifen-Renormierung des masselosen Wess-Zumino-Modells

### 4.2.1 Korrekturen der Propagatoren

Abbildung 4.2 zeigt alle nicht-verschwindenden Beiträge zu den Propagatoren des Wess-Zumino-Modells.

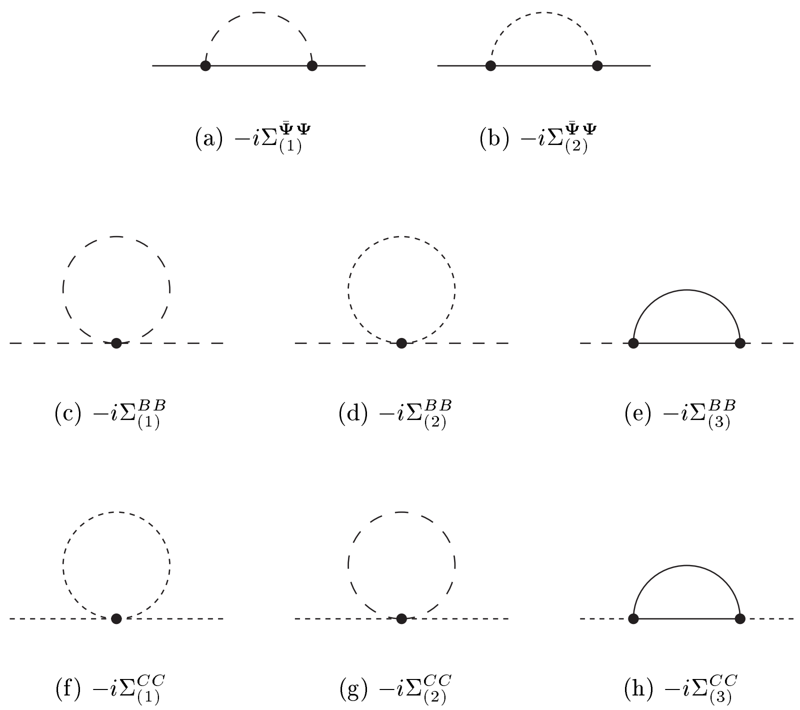



Abbildung 4.2: Diagramme die einen Beitrag zu den Propagatoren liefern. Die Tadpolediagramme des Fermionpropagators wurden unterdrückt, da deren Beitrag verschwindet.

Zunächst soll der $\bar{\boldsymbol{\Psi}}\boldsymbol{\Psi}$-Propagator berechnet werden. Neben den beiden Diagrammen 4.2(a)und 4.2(b) existieren noch zwei Tadpolediagramme, welche jedoch verschwinden, da sie die Spuren $\mathrm{tr}\{\not k\} = 0$ und $\mathrm{tr}\{\not k\gamma_5\} = 0$ enthalten. Zur Berechnung der weiteren Diagramme werde ich zunächst in den Nennern der Propagatoren eine Masse einfügen[3] und am Ende den Grenzwert $m \to 0$ bilden, da nur so alle quadratischen Divergenzen korrekt behandelt werden. Denn in dimensionaler Regularisierung ist das Integral

$$\int \frac{\mathrm{d}^d k}{k^2} = 0$$

obwohl es einer quadratischen Divergenz entspricht.

Die beiden Beiträge zum Fermionpropagator sind identisch, denn

$$\begin{aligned}
-\,i\Sigma^{\bar{\Psi}\Psi}_{(2)} &= (2g\gamma_5)\frac{i}{16\pi^2}\left\langle \frac{i}{(k+p)^2-m^2+i\delta}\frac{-i\not k}{k^2-m^2+i\delta}\right\rangle_d (2g\gamma_5)\\
&= -(2g)\gamma_5\gamma_5\frac{i}{16\pi^2}\left\langle \frac{i}{(k+p)^2-m^2+i\delta}\frac{-i\not k}{k^2-m^2+i\delta}\right\rangle_d (2g)\\
&= (-2gi)\frac{i}{16\pi^2}\left\langle \frac{i}{(k+p)^2-m^2+i\delta}\frac{-i\not k}{k^2-m^2+i\delta}\right\rangle_d \cdot(-2gi). \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

Es ist nämlich ${\gamma_5}^2 = +1$, und das bei der Vertauschung anfallende Vorzeichen wird in der letzten Zeile als $-1 = (-i)^2$ interpretiert. Bei der Auswertung des Integrals kann man auf das Ergebnis in Kapitel 3.3.2 für $I_2^{d,\mu}$ zurückgreifen,

$$\begin{aligned}
-\,i\Sigma^{\bar{\Psi}\Psi} &= 2\cdot(-2gi)\frac{i}{16\pi^2}\left\langle \frac{i}{(k+p)^2-m^2+i\delta}\frac{-i\not k}{k^2-m^2+i\delta}\right\rangle_d \cdot(-2gi)\\
&= -\frac{i\cdot 8g^2}{16\pi^2}\left\langle \frac{1}{(k+p)^2-m^2+i\delta}\frac{\not k}{k^2-m^2+i\delta}\right\rangle_d\\
&= -\frac{2i\alpha}{\pi}\gamma_\mu I_2^{d,\mu}(p,m)\\
&= \frac{i\alpha}{\pi}\not p I_2^d(p,m). \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

Dies ist im Limes $m \to 0$ gerade

$$-i\Sigma^{\bar{\Psi}\Psi}(p) = \frac{i\alpha}{\pi}\not p\left\{\Delta - \ln\left(\frac{-p^2}{\mu^2}\right) + 2\right\}. \qquad (4.14)$$

Es ist leicht einzusehen, dass $\Sigma^{BB}_{(1)} = \Sigma^{CC}_{(1)}$ und $\Sigma^{BB}_{(2)} = \Sigma^{CC}_{(2)}$. Ebenso lässt sich mit den eben benutzten Argumenten leicht zeigen, dass auch die beiden Fermionschleifen den gleichen Wert besitzen. Deshalb genügt es, $\Sigma^{BB}$ zu berechnen, da insgesamt $\Sigma^{CC} = \Sigma^{BB}$

[3]Die so gebildeten Fermionpropagatoren entsprechen nicht den massiven Propagatoren, da im Zähler der Term $m\mathbb{1}$ ignoriert wird.

ist. Man erhält so

$$
\begin{aligned}
-i\Sigma^{BB} = -i\Sigma^{BB}_{(1)} - i\Sigma^{BB}_{(2)} - i\Sigma^{BB}_{(3)} \\
= \frac{1}{2}\frac{ig^2}{16\pi^2}\Bigg((12+4)\left\langle\frac{1}{k^2-m^2+i\delta}\right\rangle_d \\
-2\cdot 2\left\langle\frac{\mathrm{tr}\{\not k(\not k+\not p)\}}{(k^2-m^2+i\delta)\left((k+p)^2-m^2+i\delta\right)}\right\rangle_d\Bigg) . \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

Die Spur ergibt nach quadratischer Ergänzung

$$
\mathrm{tr}\{\not k(\not k+\not p)\} = 2\left(k^2-m^2\right) + 2\left((k+p)^2-m^2\right) + 4m^2 - 2p^2, \qquad (4.16)
$$

wodurch sich das letzte Integral kürzen lässt zu[4]

$$
\begin{aligned}
\left\langle\frac{\mathrm{tr}\{\not k(\not k+\not p)\}}{(k^2-m^2+i\delta)\left((k+p)^2-m^2+i\delta\right)}\right\rangle_d = \\
2\left\{\left\langle\frac{1}{(k+p)^2-m^2+i\delta}\right\rangle_d + \left\langle\frac{1}{k^2-m^2+i\delta}\right\rangle_d\right. \\
\left. + \left\langle\frac{4m^2-p^2}{(k^2-m^2+i\delta)\left((k+p)^2-m^2+i\delta\right)}\right\rangle_d\right\} \\
= 2I_1^d(m) - 2I_1^d(m) + 2(4m^2-p^2)I_2^d(p,m) \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

Insgesamt heben sich also die quadratisch divergenten Terme gerade weg. Der verbleibende Teil des Integrals ist nach Bildung des Limes $m \to 0$

$$
-i\Sigma^{BB} = \frac{i\alpha}{\pi}p^2 I_2^d(p) \qquad (4.18)
$$

Das Aufheben der quadratischen Divergenzen ist eine Folge der Supersymmetrie. Angenommen, anstatt der universellen Kopplung würde das Wes-Zumino-Modell durch individuelle Kopplungskonstanten $g_{\bar{\Psi}\Psi B}$, $g_{\bar{\Psi}\Psi C}$, $g_{BBBB}$, $g_{CCCC}$ und $g_{BBCC}$ beschrieben werden, so würde man für die Korrekturen der Propagatoren die Ausdrücke

$$
\begin{aligned}
-i\Sigma^{\bar{\Psi}\Psi} &= \frac{i}{8\pi^2}\left(g_{\bar{\Psi}\Psi B} + g_{\bar{\Psi}\Psi C}\right) I_2^d(p) && (4.19) \\
-i\Sigma^{BB} &= \frac{i}{32\pi^2}\Big\{\left(12{g_{BBBB}}^2 + 4{g_{BBCC}}^2 - 16{g_{\bar{\Psi}\Psi B}}^2\right) I_1^d(m) \\
&\quad -8g_{\bar{\Psi}\Psi B}p^2 I_2^d(p)\Big\} && (4.20) \\
-i\Sigma^{CC} &= \frac{i}{32\pi^2}\Big\{\left(12{g_{CCCC}}^2 + 4{g_{BBCC}}^2 - 16{g_{\bar{\Psi}\Psi C}}^2\right) I_1^d(m) \\
&\quad -8g_{\bar{\Psi}\Psi C}p^2 I_2^d(p)\Big\} && (4.21)
\end{aligned}
$$

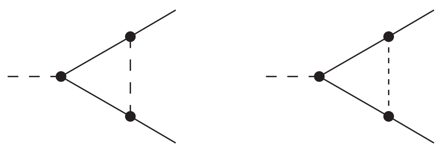
erhalten[5]. Man erkennt am Skalar- und Pseudoskalarpropagator sofort, dass ohne die Supersymmetrie ein Auftreten von quadratischen Divergenzen durchaus erlaubt wäre.

[4] Der zweite Term der letzten Zeile ergibt sich durch eine Verschiebung des Ursprungs $k \to k - p$

[5] plus Terme $\mathcal{O}(m)$

### 4.2.2 Korrekturen der Dreipunktfunktionen

Die Korrekturen zu den Dreipunktfunktionen $V_{\bar{\Psi}\Psi B}$ und $V_{\bar{\Psi}\Psi C}$ verschwinden identisch. Um dies zu zeigen genügt eine Betrachtung der beiden Diagramme, die zu $\Lambda^{\bar{\Psi}\Psi B}$ beitragen.



(a) $i\Lambda^{\bar{\Psi}\Psi B}_{(1)}$ (b) $i\Lambda^{\bar{\Psi}\Psi B}_{(2)}$

Abbildung 4.3: Diagramme die einen Beitrag zum Fermion-Boson-Vertex liefern.

Beide Beiträge, $\Lambda^{\bar{\Psi}\Psi B}_{(1)}$ und $\Lambda^{\bar{\Psi}\Psi B}_{(2)}$, sind bis auf das Vorzeichen identisch, denn

$$\begin{aligned} i\Lambda^{\bar{\Psi}\Psi B}_{(2)} &= \frac{i}{16\pi^2}\left\langle \frac{(2g\gamma_5)(\not{k}+\not{p}_2)(-2gi)(\not{k}-\not{p}_3)(2g\gamma_5)}{k^2(k+p_2)^2(k-p3)^2}\right\rangle_d \\ &= \frac{i}{16\pi^2}\left\langle \frac{(2g)(\not{k}+\not{p}_2)\gamma_5(-2gi)\gamma_5(\not{k}-\not{p}_3)(2g)}{k^2(k+p_2)^2(k-p3)^2}\right\rangle_d \\ &= \frac{i}{16\pi^2}\left\langle \frac{(2g)(\not{k}+\not{p}_2)(-2gi)(\not{k}-\not{p}_3)(2g)}{k^2(k+p_2)^2(k-p3)^2}\right\rangle_d \\ &= -\frac{i}{16\pi^2}\left\langle \frac{(-2gi)(\not{k}+\not{p}_2)(-2gi)(\not{k}-\not{p}_3)(-2gi)}{k^2(k+p_2)^2(k-p3)^2}\right\rangle_d \\ &= -(i\Lambda^{\bar{\Psi}\Psi B}_{(1)}). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Damit sind die Beiträge zu beiden Dreipunktfunktionen gleich Null,

$$\Lambda^{\bar{\Psi}\Psi B} = 0, \tag{4.23}$$

$$\Lambda^{\bar{\Psi}\Psi C} = 0, \tag{4.24}$$

wobei die letzte Gleichung durch eine analoge Umformung zustande kommt.

### 4.2.3 Bestimmung der Renormierungskonstanten

Die in den Einschleifendiagrammen auftretenden Divergenzen sollen nun durch multiplikative Renormierung absorbiert werden. Bei der Renormierung wird ausgenutzt, dass den Parametern der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}(\Phi, \mathbf{\Psi}, m, g)$ noch keine physikalischen Werte zugeschrieben wurde. Diese Freiheit wird nun fixiert, indem man die Größen in der ursprünglichen Lagrange-Dichte als nackte Größen betrachtet, die im folgenden mit einer Null indiziert werden. Die physikalischen, nicht indizierten Größen stimmen mit den nackten Größen bis auf eine multiplikative Konstante überein

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}(B_0, C_0, \mathbf{\Psi}_0, g_0) = \mathcal{L}(\sqrt{Z_B}B, \sqrt{Z_C}C, \sqrt{Z_{\mathbf{\Psi}}}\mathbf{\Psi}, Z_g g). \tag{4.25}$$

Das Nicht-Renormierungs-Theorem [GGRS83, S.358] für chirale Superfelder besagt jedoch, dass die Größen, die aus dem Superpotential stammen, also Massen und Kopplungskonstanten, nur als Folge der Wellenfunktionsrenormierung renormiert werden. Dies hat zur Folge, dass man bei der Renormierung mit nur einer Renormierungskonstante $Z$ auskommt. Die Ergebnisse dieses Kapitels werden zeigen, dass die Wahl

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}(B_0, C_0, \mathbf{\Psi}_0, g_0) = \mathcal{L}(\sqrt{Z}B, \sqrt{Z}C, \sqrt{Z}\mathbf{\Psi}, Z^{-3/2}g) \tag{4.26}$$

zum gewünschten Ergebnis für die Renormierung führt. Dieses Ergebnis lässt sich auch ohne explizite Rechnung in Komponentenfeldern als direkte Folge des Nicht-Renormierungs-Theorems gewinnen (s. [BK95, S. 341–345]).

Da $Z$ selbst eine Funktion von $\alpha$ ist, entwickelt man $Z$ bis zum linearen Term, also $Z = 1 + \delta Z + \mathcal{O}(\alpha^2)$, wobei $\delta Z \propto \alpha$ ist. Setzt man diese Entwicklung wieder in die Lagrange-Dichte ein, so stellt man fest, dass zusätzlich zu den Termen der unrenormierten Lagrange-Dichte neue Terme auftauchen, die proportional zu $\delta Z$ sind[6]. Diese identifiziert man als neue, zusätzliche Feynman-Regeln, die sogenannten Counterterme.

Im Falle des masselosen Wess-Zumino-Modells besitzt die renormierte Lagrange-Dichte die folgende Gestalt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\left(1 + \delta Z_{\mathbf{\Psi}}\right) \bar{\mathbf{\Psi}}(i\partial\!\!\!/)\mathbf{\Psi} - \frac{1}{2}\left(1 + \delta Z_B\right) B\Box B - \frac{1}{2}\left(1 + \delta Z_C\right) C\Box C \\ - \frac{1}{2}\left(1 + 2\delta Z_g + 2\delta Z_B\right) \mu^{4-d} g^2 B^4 - \frac{1}{2}\left(1 + 2\delta Z_g + 2\delta Z_C\right) \mu^{4-d} g^2 C^4 \\ - \left(1 + 2\delta Z_g + \delta Z_B + \delta Z_C\right) \mu^{4-d} g^2 B^2 C^2 - \left(1 + \delta Z_g + \frac{1}{2}\delta Z_B + \delta Z_{\mathbf{\Psi}}\right) \mu^{(4-d)/2} g \bar{\mathbf{\Psi}}\mathbf{\Psi}B \\ - \left(1 + \delta Z_g + \frac{1}{2}\delta Z_C + \delta Z_{\mathbf{\Psi}}\right) \mu^{(4-d)/2} g \bar{\mathbf{\Psi}}(-i\gamma_5)\mathbf{\Psi}C.\end{aligned} \tag{4.27}$$

[6]Im allgemeinen Fall sind diese Terme proportional zu $\delta Z_B$, $\delta Z_C$, $\delta Z_{\mathbf{\Psi}}$ und den zu den unterschiedlichen Kopplungen geörenden $\delta Z_{g_i}$, wobei $i$ die Kopplungen indiziert.

Die Lagrange-Dichte lässt sich aufteilen in zwei Anteile,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 &= \mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{ct}} && (4.28)\\
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\bar{\mathbf{\Psi}}(i\partial\!\!\!/)\mathbf{\Psi} - \frac{1}{2}B\Box B - \frac{1}{2}C\Box C \\
&\quad -\frac{1}{2}\mu^{4-d}g^2B^4 - \frac{1}{2}\mu^{4-d}g^2C^4 - \mu^{4-d}g^2B^2C^2 \\
&\quad -\mu^{(4-d)/2}g\bar{\mathbf{\Psi}}\mathbf{\Psi}B - \mu^{(4-d)/2}g\bar{\mathbf{\Psi}}(-i\gamma_5)\mathbf{\Psi}C && (4.29)\\
\mathcal{L}_{\text{ct}} &= \frac{1}{2}\delta Z_{\mathbf{\Psi}}\bar{\mathbf{\Psi}}(i\partial\!\!\!/)\mathbf{\Psi} - \frac{1}{2}\delta Z_B B\Box B - \frac{1}{2}\delta Z_C C\Box C \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(2\delta Z_g + 2\delta Z_B\right)\mu^{4-d}g^2B^4 - \frac{1}{2}\left(2\delta Z_g + 2\delta Z_C\right)\mu^{4-d}g^2C^4 \\
&\quad -\left(2\delta Z_g + \delta Z_B + \delta Z_C\right)\mu^{4-d}g^2B^2C^2 && (4.30)\\
&\quad -\left(\delta Z_g + \frac{1}{2}\delta Z_B + \delta Z_{\mathbf{\Psi}}\right)\mu^{(4-d)/2}g\bar{\mathbf{\Psi}}\mathbf{\Psi}B \\
&\quad -\left(\delta Z_g + \frac{1}{2}\delta Z_C + \delta Z_{\mathbf{\Psi}}\right)\mu^{(4-d)/2}g\bar{\mathbf{\Psi}}(-i\gamma_5)\mathbf{\Psi}C && (4.31)
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet man den Anteil $\mathcal{L}_{\text{ct}}$ als Counterterme.

An dieser Stelle ist noch nicht festgelegt, wie die Renormierungskonstanten zu wählen sind, die einzige grundsätzliche Bedingung ist das Verschwinden aller ultravioletten Pole nach der Renormierung. Es verbleibt also noch die Freiheit, den Renormierungskonstanten beliebige UV-endliche Terme hinzuzuaddieren. Hierfür existieren unterschiedliche Vorschriften, sogenannte Renormierungsschemata. Ein Renormierungsschema legt fest, welche UV-endlichen Terme zu den in einer Renormierungskonstanten absorbierten Pole hinzuaddiert werden. Gleichzeitig stellt das Renormierungsschema so eine Vorschrift dar, wie aus Observablen die Parameter eines Modells gewonnen werden. Das heißt andererseits auch, ein physikalisches Ergebnis auf Ein- oder Mehrschleifenniveau wird erst durch die Angabe des verwendeten Renormierungsschemas eindeutig und somit sinnvoll. Hier sollen zwei Schemata diskutiert werden, das sogenannte $\overline{\text{M}S}$-Schema und die On-Shell-Renormierung.

Die Renormierungsbedingungen für die On-Shell-Renormierung (OSR) liefern die Forderung, dass ein Propagator $G^{-1}(p)$ für ein Teilchen auf der Massenschale das Residuum $\operatorname*{Res}_{p^2=m^2} G^{-1}(p) = 1$ besitzen soll. Im einzelnen sind dies die Gleichungen

$$\begin{aligned}
G^{\bar{\mathbf{\Psi}}\mathbf{\Psi}}(p)_{p^2=m^2}\left|u\right\rangle &= 0 && (4.32)\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p\!\!\!/}G^{\bar{\mathbf{\Psi}}\mathbf{\Psi}}(p)_{p^2=m^2} &= 1 && (4.33)\\
G^{BB}(p)_{p^2=m^2} &= 0 && (4.34)\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p^2}G^{BB}(p)_{p^2=m^2} &= 1. && (4.35)
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist für einen beliebigen Zustand $\left|u\right\rangle$, der der Dirac-Gleichung $p\!\!\!/\left|u\right\rangle = 0$ genügt definiert.

Im masselosen Fall ist das zweite Renormierungsschema praktikabler, das $\overline{MS}$-Schema[7]. Dieses Renormierungsschema fordert, dass der Counterterm nur Terme proportional zu $\Delta$ enthalten soll, jedoch keine UV-endlichen Beiträge.

Die Ergebnisse der vorangegangenen Kapitel sind hier noch ein Mal kurz zusammengefasst.

$$\Sigma^{\bar{\Psi}\Psi}(p) = -\frac{\alpha}{\pi}\Delta\not{p} + \text{fin.} \tag{4.36}$$

$$\Sigma^{BB}(p) = -\frac{\alpha}{\pi}\Delta p^2 + \text{fin.} \tag{4.37}$$

$$\Lambda^{\bar{\Psi}\Psi B} = 0 \tag{4.38}$$

Da die Korrekturen $\Sigma^{CC}(p) = \Sigma^{BB}(p)$ gleich sind, können wir schließen, dass $\delta Z_B = \delta Z_C$ ist. Um die Renormierungskonstanten aus (4.36–4.38) abzuleiten betrachtet man zuerst die Propagatoren. Den vollständigen Propagator $iS'(p)$ auf Einschleifenniveau erhält man durch Resummation aller irreduziblen Beiträge [BD90, S. 295ff.],

$$\begin{aligned} iS'(p) = iS(p) + iS(p)\left[-i\Sigma(p)\right]iS(p) + iS(p)\left[-i\Sigma(p)\right]iS(p)\left[-i\Sigma(p)\right]iS(p) + \ldots \\ = iS(p)\frac{1}{1-\Sigma(p)S(p)}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Dies bedeutet für den $B$-Feld-Propagator $iS_B(p)$

$$iS'_B(p) = \frac{i}{Z_B p^2 + i\delta}\frac{1}{1+\frac{\alpha}{\pi}I_2^d(p)} = \frac{i}{p^2+i\delta}\left[1 - \delta Z_B - \frac{\alpha}{\pi}I_2^d(p) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right] \tag{4.40}$$

Die Renormierungsbedingung besagt nun, dass die Renormierungskonstante $\delta Z_B$ genau den Pol von $I_2^d(p) = \Delta + \text{fin.}$ absorbieren muss, also

$$\delta Z_B = -\frac{\alpha}{\pi}\Delta \tag{4.41}$$

und damit ist auch

$$\delta Z_C = -\frac{\alpha}{\pi}\Delta. \tag{4.42}$$

Analog findet man auch für den Fermionpropagator $S_\Psi(p)$ die entsprechende Renormierungskonstante. Führt man wie bereits in (4.26) angedeutet eine gemeinsame Renormierungskonstante $Z$ ein, mit

$$\delta Z = -\frac{\alpha}{\pi}\Delta, \tag{4.43}$$

so findet man für die Renormierungskonstanten aus der Wellenfunktionsrenormierung $\delta Z_\Psi = \delta Z_B = \delta Z_C = \delta Z$.

Die Bestimmung von $\delta Z_g$ erfolgt nun, da die Korrektur des Fermion-Boson-Vertex verschwindet, allein durch Vergleich der Renormierungskonstanten. Aufgrund der

[7] *MS* steht für *Minimal Subtraction*, und $\overline{\text{MS}}$ ist das modifizierte MS-Schema.

verschwindenden Vertexkorrektur muss der entsprechende Counterterm ebenfalls Null ergeben. Dies liefert die Renormierungsbedingung für $\delta Z_g$, nämlich

$$0 = \delta Z_B + \frac{1}{2}\delta Z_{\mathbf{\Psi}} + \delta Z_g = \frac{3}{2}\delta Z + \delta Z_g, \quad \text{also } \delta Z_g = -\frac{3}{2}\delta Z. \tag{4.44}$$

Die Ergebnisse aus den Renormierungsbedingungen für $\overline{\text{MS}}$ und aus (4.36)–(4.38) kann man nun zusammenfassen,

$$\begin{aligned} \delta Z_B &= -\frac{\alpha}{\pi}\Delta = \delta Z & (4.45)\\ \delta Z_C &= -\frac{\alpha}{\pi}\Delta = \delta Z & (4.46)\\ \delta Z_{\mathbf{\Psi}} &= -\frac{\alpha}{\pi}\Delta = \delta Z & (4.47)\\ \delta Z_g &= \frac{3}{2}\frac{\alpha}{\pi}\Delta = -\frac{3}{2}\delta Z. & (4.48) \end{aligned}$$

Die Berechnung der Vierpunktamplituden liefert weitere Gleichungen, die hier allerdings redundant sind und deshalb als Konsistenzbedingungen herangezogen werden können. Die Existenz solcher Konsistenzbedingungen ist hier eine Folge der Supersymmetrie. Ohne Supersymmetrie wären die Kopplungen $g_{\bar{\mathbf{\Psi}}\mathbf{\Psi}B}$, $g_{\bar{\mathbf{\Psi}}\mathbf{\Psi}C}$, $g_{BBBB}$, $g_{CCCC}$ und $g_{BBCC}$ unabhängig voneinander. Es wären also acht Renormierungskonstanten, nämlich fünf für die verschiedenen Kopplungen und drei für die Felder zu bestimmen, andererseits existieren aber auch genau acht Renormierungsbedingungen, drei aus den Propagatoren und fünf aus den Vertizes.

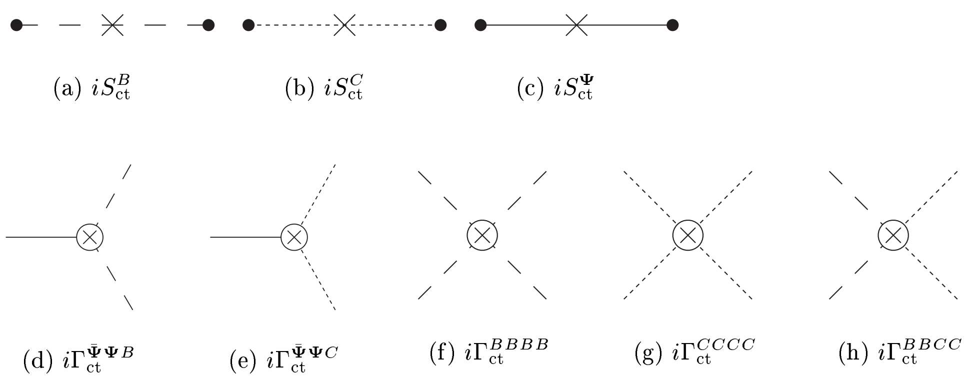



Abbildung 4.4: Die Countertermgraphen für das masselose WZM

Aus den Renormierungskonstanten lassen sich nun die Counterterme bestimmen.

Folgende Counterterme für die Vertizes liest man aus der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_{\text{ct}}$ ab:

$$\begin{aligned}
i\Gamma_{\text{ct}}^{\bar{\mathbf{\Psi}}\mathbf{\Psi}B} &= \left(\delta Z_g + \frac{1}{2}\delta Z_B + \delta Z_{\mathbf{\Psi}}\right) V_{\bar{\mathbf{\Psi}}\mathbf{\Psi}B} = 0 && (4.49)\\
i\Gamma_{\text{ct}}^{\bar{\mathbf{\Psi}}\mathbf{\Psi}C} &= \left(\delta Z_g + \frac{1}{2}\delta Z_C + \delta Z_{\mathbf{\Psi}}\right) V_{\bar{\mathbf{\Psi}}\mathbf{\Psi}C} = 0 && (4.50)\\
i\Gamma_{\text{ct}}^{BBBB} &= \left(2\delta Z_g + 2\delta Z_B\right) V_{BBBB} = \frac{\alpha\Delta}{\pi} V_{BBBB} && (4.51)\\
i\Gamma_{\text{ct}}^{CCCC} &= \left(2\delta Z_g + 2\delta Z_C\right) V_{CCCC} = \frac{\alpha\Delta}{\pi} V_{CCCC} && (4.52)\\
i\Gamma_{\text{ct}}^{BBCC} &= \left(2\delta Z_g + \delta Z_B + \delta Z_C\right) V_{BBCC} = \frac{\alpha\Delta}{\pi} V_{BBCC} && (4.53)
\end{aligned}$$

Die Propagatorcounterterme liest man einfach aus Gleichung (4.40) und ihren Entsprechungen für $S'_C$ und $S'_{\mathbf{\Psi}}$ ab,

$$\begin{aligned}
iS_{\text{ct}}^{B}(p) &= -\delta Z_B \frac{i}{p^2 + i\delta} = \frac{\alpha\Delta}{\pi}\frac{i}{p^2 + i\delta}, && (4.54)\\
iS_{\text{ct}}^{C}(p) &= -\delta Z_C \frac{i}{p^2 + i\delta} = \frac{\alpha\Delta}{\pi}\frac{i}{p^2 + i\delta}, && (4.55)\\
iS_{\text{ct}}^{\mathbf{\Psi}}(p) &= -\delta Z_{\mathbf{\Psi}} \frac{i}{\not{p} + i\delta} = \frac{\alpha\Delta}{\pi}\frac{i}{\not{p} + i\delta}. && (4.56)
\end{aligned}$$

Damit sind alle Counterterme bestimmt. Das renormierte Modell kann nun verwendet werden, um Amplituden auf Einschleifenniveau zu berechnen. Im Folgenden werden die Vier- und Sechsskalaramplitude explizit berechnet, und es wird gezeigt, wie daraus weitere Amplituden gewonnen werden können.

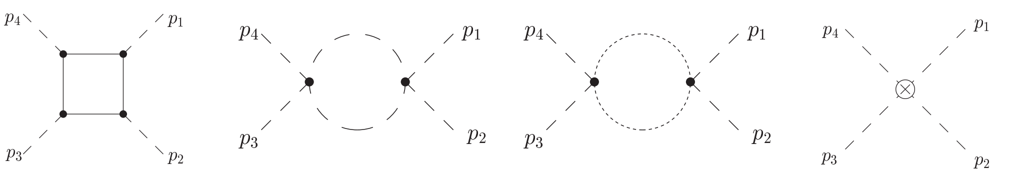
# 5 Vielteilchenamplituden im masselosen Wess-Zumino-Modell

## 5.1 Die Vierskalaramplitude

### 5.1.1 Die Struktur der Amplitude

Im Folgenden soll die Vierskalaramplitude im masselosen Wess-Zumino-Modell berechnet werden. Hier können bereits einige grundlegende Methoden veranschaulicht werden, die auch für die Berechnung der Sechsskalaramplitude eingesetzt werden.

Die zur Vierskalaramplitude $\Lambda^{BBBB}$ beitragenden Diagramme sind in Abbildung 5.1 wiedergegeben, wobei zusätzlich die Diagramme zu berücksichtigen sind, die aus einer Permutation der äußeren Impulse aus den angegebenen hervorgehen.



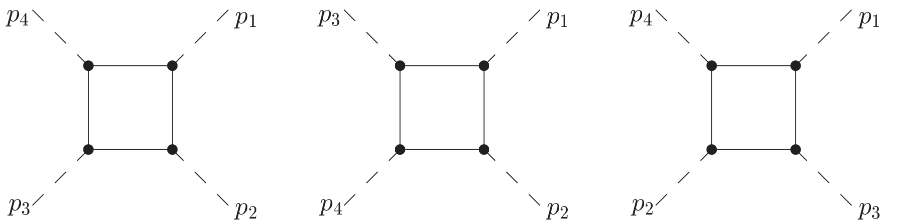

(a) $i\Lambda^{BBBB}_{\text{box}}$ (b) $i\Lambda^{BBBB}_{\text{sg}_1}$ (c) $i\Lambda^{BBBB}_{\text{sg}_2}$ (d) $i\Lambda^{BBBB}_{\text{ct}}$

Abbildung 5.1: Diagramme, die zur Vierskalaramplitude beitragen

Betrachtet man zunächst nur die Boxamplitude, so kann man drei Diagramme angeben, die die selbe Topologie besitzen, sich jedoch in der Anordnung der Impulse unterscheiden, nämlich $\Lambda^{BBBB}_{\text{box}}(p_1,p_2,p_3,p_4)$, $\Lambda^{BBBB}_{\text{box}}(p_1,p_2,p_4,p_3)$ und $\Lambda^{BBBB}_{\text{box}}(p_1,p_3,p_2,p_4)$ (s. Abb. 5.2). Alle weiteren Permutationen lassen sich durch Drehungen und Spiegelungen wieder auf eines der drei Diagramme zurückführen; so ist z. B. $\Lambda^{BBBB}_{\text{box}}(p_1,p_4,p_3,p_2) = \Lambda^{BBBB}_{\text{box}}(p_3,p_4,p_1,p_2) = \Lambda^{BBBB}_{\text{box}}(p_1,p_2,p_3,p_4)$. Ähnlich verfährt man auch bei den anderen Topologien.

Durch einfache Überlegungen kann man die Amplitude $\Lambda^{BBBB}$ auf eine Summe von impulsgeordneten Amplituden $\mathcal{A}^{BBBB}$ zurückführen, die *alle* Permutationen der Impulse durchläuft, auch wenn dadurch die Diagramme mehrfach gezählt werden. Für die Amplitude $\Lambda^{BBBB}$, die vier äußeren Skalarfelder enthält, ist die Permutationsgruppe[1]

[1]Siehe auch Anhang 8.1.2




(a) $i\Lambda_{\text{box}}^{BBBB}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ (b) $i\Lambda_{\text{box}}^{BBBB}(p_1, p_3, p_2, p_4)$ (c) $i\Lambda_{\text{box}}^{BBBB}(p_1, p_2, p_4, p_3)$

Abbildung 5.2: Mögliche Permutationen der Impulse bei der Boxamplitude.

die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_4$. Die Amplitude kann also geschrieben werden als

$$\Lambda^{BBBB}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \sum_{\pi \in \mathcal{S}_4} \mathcal{A}^{BBBB}(p_{\pi(1)}, p_{\pi(2)}, p_{\pi(3)}, p_{\pi(4)}). \tag{5.1}$$

Die Gleichung verdeutlicht auch, was man aufgrund rein physikalischer Argumente erwarten würde: Da im Experiment die vier Skalaren Teilchen ununterscheidbar sind und sich nur durch ihren Impuls unterscheiden, muss die Amplitude von der Zuordnung der Impulse zu Beinen der Diagramme unabhängig sein. Da über alle Permutationen der Impulse summiert wird, gilt auch für die Amplitude selbst $\forall \pi \in \mathcal{S}_4$ :

$$\pi\Lambda^{BBBB}(p_1, p_2, p_3, p_4) \equiv \Lambda^{BBBB}(p_{\pi(1)}, p_{\pi(2)}, p_{\pi(3)}, p_{\pi(4)}) = \Lambda^{BBBB}(p_1, p_2, p_3, p_4). \tag{5.2}$$

Um nun die Überzählung der kongruenten, also durch Drehungen, Spiegelungen und stetige Verformungen ineinander überführbaren Diagramme wieder zu korrigieren, führt man sogenannte Symmetriefaktoren ein. Der Symmetriefaktor ist das Reziproke der Anzahl der möglichen Permutationen, die ein Diagramm in ein kongruentes überführen. Führt man als Symmetriegruppe $\mathcal{G}_x$ eines Diagramms $i\Lambda_x$ die maximale Untergruppe der Permutationsgruppe des Diagramms ein, deren Elemente das Diagramm in ein kongruentes transformieren, so kann man den Symmetriefaktor auch durch die Länge der Symmetriegruppe ausdrücken

$$s_x = \frac{1}{|\mathcal{G}_x|}. \tag{5.3}$$

Eine dritte Möglichkeit der Definition des Symmetriefaktors ist als Quotient aus der Anzahl $N_x$ der unterscheidbaren durch Permutation erzeugten Diagramme und der Fakultät der Anzahl $n$ der Beine des Diagramms, also

$$s_x = \frac{N_x}{n!}. \tag{5.4}$$

Wiederum am Boxdiagramm soll gezeigt werden, dass diese Definition eines Symmetriefaktors genau die durch Berück-sichtigung aller Permutationen entstehende Überzählung korrigiert. Die Vierskalarbox $i\Lambda_{\text{box}}^{BBBB}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ ist invariant unter zyklischen

Vertauschungen der Beine sowie unter beliebigen Spiegelungen. Demnach ist die Symmetriegruppe

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{\text{box}} &= \langle(1234),(13)\rangle \\ &= \{(1)(2)(3)(4),(1234),(13)(24),(1432), \\ &\qquad (12)(34),(13)(2)(4),(14)(23),(1)(24)(3)\} \\ &= \{(1),(1234),(13)(24),(4321),(12)(34),(13),(14)(23),(24)\}\end{aligned} \tag{5.5}$$

und deren Länge $|\mathcal{G}_{\text{box}}| = 8$. Man zählt also bei Berücksichtigung aller Permutationen jedes Diagramm achtfach. der Symmetriefaktor $s_{\text{box}} = 1/8$ korrigiert dies gerade.

Andererseits gibt es 4! Permutationen von vier externen Beinen. Dies bedeutet man kann 4! nicht notwendigerweise verschiedene Diagramme erzeugen. Aus anderen Überlegungen wissen wir bereits, dass genau drei unterscheidbare Boxdiagramme existieren und deshalb 4!/3, also jeweils 8 Diagramme kongruent sind. Auf diese Weise erhält man ebenfalls den Symmetriefaktor von 1/8. Diese letzte Methode den Symmetriefaktor zu bestimmen ist vor allem dann relevant, wenn man einen Diagrammgenerator wie z. B. `QGraf` hat, so dass man die Anzahl der Diagramme automatisch bestimmen kann und so seine Ergebnisse überprüfen kann.

Für die beiden Diagramme $i\Lambda_{\text{sg}_k}, k = 1,2$ lässt sich der Symmetriefaktor $s_{\text{sg}}$ ebenso einfach berechnen. Für die beiden Diagramme existieren jeweils drei nicht-kongruente Permutationen. Lässt man nämlich einen Impuls, z. B. $p_1$ fest, so ist das Diagramm bereits durch den am Vertex von $p_1$ anliegenden zweiten Impuls vollständig festgelegt. Damit sind die vier unterschiedlichen Amplituden $\Lambda^{BBBB}_{\text{sg}_k}(p_1,p_2,p_3,p_4)$, $\Lambda^{BBBB}_{\text{sg}_k}(p_1,p_3,p_2,p_4)$ und $\Lambda^{BBBB}_{\text{sg}_k}(p_1,p_4,p_2,p_3)$. Man erhält also den Symmetriefaktor $s_{sg} = 3/4! = 1/8$, also den gleichen Faktor wie schon beim Boxdiagramm. Zum Vergleich sei auch noch die Symmetriegruppe $\mathcal{G}_{\text{sg}}$ angegeben. Das Diagramm ist unter Vertauschung der Impulse an einem der beiden Vertizes sowie unter Spiegelung entlang der senkrechten Symmetrieachse invariant. Dies kann man durch die Gruppe

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{\text{sg}} &= \langle(14),(12)(34)\rangle \\ &= \{(1),(14),(12)(34),(14)(12)(34),(12)(34)(14), \\ &\qquad (12)(34)(14)(12)(34),(14)(12)(34)(14),(12)(34)(14)(12)(34)(14)\} \\ &= \{(1),(14),(12)(34),(1342),(1243),(23),(13)(24),(14)(23)\}\end{aligned} \tag{5.6}$$

ausdrücken, die die Länge $|\mathcal{G}_{\text{sg}}| = 8$ besitzt.

Da der Countertermgraph unter jeder Permutation invariant bleibt ist sein Symmetriefaktor $s_{\text{ct}} = 1/4!$.

Die impulsgeordnete Vierskalaramplitude kann man also ausdrücken durch

$$\mathcal{A}^{BBBB} = s_{\text{box}}\Lambda^{BBBB}_{\text{box}}(p_1,p_2,p_3,p_4) + s_{\text{sg}}\Lambda^{BBBB}_{\text{sg}}(p_1,p_2,p_3,p_4) + s_{\text{ct}}\Lambda^{BBBB}_{\text{ct}}, \tag{5.7}$$

wobei $\Lambda^{BBBB}_{\text{sg}} = \Lambda^{BBBB}_{\text{sg}_1} + \Lambda^{BBBB}_{\text{sg}_2}$ ist.

Ein Vorteil impulsgeordneter Amplituden ist die Möglichkeit, diese zu symmetrisieren und auf diese Weise Vereinfachungen bereits vor der Summation über alle Diagramme zu erkennen. Die Amplitude $\Lambda_{\rm sg}^{BBBB}(p_1,p_2,p_3,p_4)$ hängt nur von der Energieskala $s_{12}$ ab, während die Box $\Lambda_{\rm box}^{BBBB}$ von allen Mandelstam-Variablen abhängen kann. Deshalb führt die Ersetzung

$$\Lambda_{\rm sg}^{BBBB}(p_1,p_2,p_3,p_4) \longrightarrow \frac{1}{2}\left(\Lambda_{\rm sg}^{BBBB}(p_1,p_2,p_3,p_4) + \Lambda_{\rm sg}^{BBBB}(p_4,p_1,p_2,p_3)\right) \tag{5.8}$$

auf einen einfacheren Ausdruck für $\mathcal{A}^{BBBB}$. Mit[2] $\mathcal{P}_4 \equiv (1234) \in \mathcal{S}_4$ kann man die impulsgeordnete symmetrisierte Amplitude auch schreiben als

$$\mathcal{A}^{BBBB} = s_{\rm box}\Lambda_{\rm box}^{BBBB}(p_1,p_2,p_3,p_4) + \frac{s_{\rm sg}}{2}(1+\mathcal{P}_4)\Lambda_{\rm sg}^{BBBB}(p_1,p_2,p_3,p_4) + s_{\rm ct}\Lambda_{\rm ct}^{BBBB}, \tag{5.9}$$

Um die Vereinfachungen aus der Supersymmetrie besser zu beleuchten, wird die Amplitude zunächst mit beliebigen Kopplungen $g_{\bar{\Psi}\Psi B}$, $g_{BBBB}$, etc. berechnet und erst zum Schluss der supersymmetrische Limes $g_i \to g$ betrachtet. Es wird sich zeigen, dass nur in diesem Limes die Gesamtamplitude eine kompakte Form annimmt. Es sei nochmals darauf verwiesen, dass alle Ergebnisse für den euklidischen Bereich angegeben sind.

### 5.1.2 Berechnung der Beiträge

Der einfachste Beitrag ergibt sich aus den Graphen $\Lambda_{\rm sg}^{BBBB}$. Es genügt einen der beiden Beiträge $\Lambda_{\rm sg_1}^{BBBB}$ und $\Lambda_{\rm sg_2}^{BBBB}$ zu berechnen, da man den jeweils anderen durch die Ersetzung $12g_{BBBB} \leftrightarrow 4g_{BBCC}$ erhält. Man erhält zunächst

$$\begin{aligned}
i\Lambda_{\rm sg_1}^{BBBB}(p_1,p_2,p_3,p_4) &= \frac{1}{2}(-i\cdot 12 g_{BBBB}^2\mu^{4-d})^2 \int \frac{{\rm d}^d k}{(2\pi)^d}\frac{i}{(k+p_{12})^2}\frac{i}{k^2} \\
&= \frac{1}{2}(12 g_{BBBB}^2\mu^{4-d})^2 \frac{i\mu^{-(4-d)}}{16\pi^2}\left\langle \frac{1}{k^2(k+p_{12})^2}\right\rangle_d, \\
\Lambda_{\rm sg_1}^{BBBB}(p_1,p_2,p_3,p_4) &= 9 g_{BBBB}^4\mu^{4-d}\frac{1}{2\pi^2} I_2^d(p_{12}) \\
&= 9 g_{BBBB}^4\mu^{4-d}\frac{1}{2\pi^2}\left(\Delta - \ln\left(\frac{-s_{12}}{\mu^2}\right)+2\right).
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Damit erhält man für das Diagramm $\Lambda_{\rm sg_2}^{BBBB}$ den Ausdruck

$$\Lambda_{\rm sg_2}^{BBBB}(p_1,p_2,p_3,p_4) = g_{BBCC}^4\mu^{4-d}\frac{1}{2\pi^2}\left(\Delta - \ln\left(\frac{-s_{12}}{\mu^2}\right)+2\right). \tag{5.11}$$

Das Box-Diagramm liefert den Ausdruck

$$i\Lambda_{\rm box}^{BBBB} = (-1)\left(-i\cdot 2 g_{\bar{\Psi}\Psi B}\mu^{(4-d)/2}\right)^4 \frac{i\mu^{d-4}}{16\pi^2}\left\langle \frac{i^4 {\rm tr}\{\not{q}_1\not{q}_2\not{q}_3\not{q}_4\}}{{q_1}^2{q_2}^2{q_3}^2{q_4}^2}\right\rangle_d. \tag{5.12}$$

[2] Zur Notation s. Anhang 8.1.2

Durch elementare Umformungen zeigt man, dass

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\{\not{q}_1\not{q}_2\not{q}_3\not{q}_4\} &= (1/2)\mathrm{tr}\{\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_3\not{p}_4\} + (1/2)\mathrm{tr}\{\mathbb{1}\}\left({q_1}^2{q_3}^2 + {q_2}^2{q_4}^2\right) \\ &+ (1/2)\left(\mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\}{q_1}^2 + \mathrm{tr}\{\not{p}_4\not{p}_1\}{q_2}^2 + \mathrm{tr}\{\not{p}_1\not{p}_2\}{q_3}^2 + \mathrm{tr}\{\not{p}_2\not{p}_3\}{q_4}^2\right), \quad (5.13)\end{aligned}$$

denn zunächst ist

$$\mathrm{tr}\{\not{q}_1\not{q}_2\not{q}_3\not{q}_4\} = 4\left\{(q_1q_2)(q_3q_4) - (q_1q_3)(q_2q_4) + (q_1q_4)(q_2q_3)\right\}, \quad (5.14)$$

und der Rest der Umformung folgt aus der quadratischen Ergänzung

$$2(q_iq_j) = -(q_j - q_i)^2 + q_i^2 + q_j^2 = -(r_j - r_i)^2 + q_i^2 + q_j^2. \quad (5.15)$$

Alle im Zähler des Integrals vorkommenden Schleifenimpulse lassen sich nun restlos kürzen. So ist zum Beispiel

$$\left\langle \frac{q_1^2q_3^2}{q_1^2q_2^2q_3^2q_4^2}\right\rangle_d = \left\langle \frac{1}{q_2^2q_4^2}\right\rangle_d = \left\langle \frac{1}{k^2(k+r_2)^2}\right\rangle_d = I_2^d(s_{12}), \quad (5.16)$$

die anderen Integrale bestimmt man analog. Damit erhält man den Ausdruck für die Boxamplitude in einer symmetrischen, übersichtlichen Form,

$$\begin{aligned}\Lambda_{\mathrm{box}}^{BBBB} = -\frac{{g_{\bar{\Psi}\Psi B}}^4\mu^{4-d}}{2\pi^2}\Big\{&\mathrm{tr}\{\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_3\not{p}_4\}I_4^d(p_1,p_2,p_3,p_4) + 4I_2^d(p_{12}) + 4I_2^d(p_{14}) \\ &+ \mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\}I_3^d(p_{12},p_3,p_4) + \mathrm{tr}\{\not{p}_4\not{p}_1\}I_3^d(p_{23},p_4,p_1) \\ &+\mathrm{tr}\{\not{p}_1\not{p}_2\}I_3^d(p_{34},p_1,p_2) + \mathrm{tr}\{\not{p}_2\not{p}_3\}I_3^d(p_{41},p_2,p_3)\Big\}. \quad (5.17)\end{aligned}$$

Als weiteren Schritt zur Vereinfachung der Boxamplitude wendet man die Reduktionsformeln (8.38) und (8.41) an. Daneben benötigt man die Werte der auftretenden Spuren

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\{\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_3\not{p}_4\} &= -2s_{12}s_{14} && (5.18)\\ \mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\} &= \mathrm{tr}\{\not{p}_1\not{p}_2\} = 2s_{12} && (5.19)\\ \mathrm{tr}\{\not{p}_4\not{p}_1\} &= \mathrm{tr}\{\not{p}_2\not{p}_3\} = 2s_{14} && (5.20)\end{aligned}$$

und erhält so

$$\begin{aligned}
\Lambda^{BBBB}_{\text{box}} &= -\frac{g_{\bar{\Psi}\Psi B}{}^4 \mu^{4-d}}{2\pi^2} \Big\{ -2s_{12}s_{14} I_4^d(p_1,p_2,p_3,p_4) + 4 I_2^d(p_{12}) + 4 I_2^d(p_{14}) \\
&\qquad + 2s_{12} I_3^d(p_{12},p_3,p_4) + 2s_{14} I_3^d(p_{23},p_4,p_1) \\
&\qquad + 2s_{12} I_3^d(p_{34},p_1,p_2) + 2s_{14} I_3^d(p_{41},p_2,p_3) \Big\} \\
&= -\frac{g_{\bar{\Psi}\Psi B}{}^4 \mu^{4-d}}{2\pi^2} \Bigg\{ 4\left(2\Delta + 4 - \ln\left(\frac{-s_{12}}{\mu^2}\right) - \ln\left(\frac{-s_{14}}{\mu^2}\right)\right) \\
&\qquad - 2\left\{ \frac{2r_\Gamma}{\varepsilon^2}\left[(-s_{12})^{-\varepsilon} + (-s_{14})^{-\varepsilon}\right] - \ln^2\left(\frac{s_{12}}{s_{14}}\right) - \pi^2 \right\} \\
&\qquad + 2\frac{r_\Gamma}{\varepsilon^2}\left[(-s_{12})^{-\varepsilon}\right] + 2\frac{r_\Gamma}{\varepsilon^2}\left[(-s_{14})^{-\varepsilon}\right] + 2\frac{r_\Gamma}{\varepsilon^2}\left[(-s_{12})^{-\varepsilon}\right] + 2\frac{r_\Gamma}{\varepsilon^2}\left[(-s_{14})^{-\varepsilon}\right] \Bigg\} \\
&= -\frac{g_{\bar{\Psi}\Psi B}{}^4 \mu^{4-d}}{\pi^2} \Bigg\{ 4\Delta + 8 - 2\ln\left(\frac{-s_{12}}{\mu^2}\right) \\
&\qquad - 2\ln\left(\frac{-s_{14}}{\mu^2}\right) + \ln^2\left(\frac{s_{12}}{s_{14}}\right) + \pi^2 \Bigg\}. \qquad (5.21)
\end{aligned}$$

Man stellt dann fest, dass die Infrarotpole der Dreipunktfunktionen $I_3^d$ gerade die Pole der Vierpunktfunktion $I_4^d$ aufheben; die Boxamplitude ist also infrarot endlich. Davon überzeugt man sich einfach durch infrarotes ‚Power Counting'. Zunächst soll gezeigt werden, dass die Amplitude $\Lambda^{BBBB}_{\text{box}}$ frei von weichen Infrarotpolen ist. Dazu untersucht man nach der Ersetzung $k^\mu \to \lambda k^\mu$ den Grenzfall $\lambda \to 0$ im Integral, also

$$\begin{aligned}
&\lambda^d \mathrm{d}^d k \frac{\mathrm{tr}\{(\lambda \not{k} + \not{r}_1)(\lambda \not{k} + \not{r}_2)(\lambda \not{k} + \not{r}_3)(\lambda \not{k} + \not{r}_4)\}}{(\lambda k + r_1)^2 (\lambda k + r_2)^2 (\lambda k + r_3)^2 (\lambda k + r_4)^2} \\
&\qquad \xrightarrow{\lambda \to 0} \lambda^d \mathrm{d}^d k \frac{\mathrm{tr}\{\not{r}_1 \not{r}_2 \not{r}_3 \lambda \not{k}\}}{(2\lambda k p_1)(r_2)^2(-2\lambda k p_4)^2 \lambda^2 k^2} \propto \lambda^{d-3}, \qquad (5.22)
\end{aligned}$$

wobei verwendet wurde, dass $r_1 = p_1$, $r_3 = -p_4$ und $r_4 = 0$, sowie $p_1{}^2 = p_2{}^2 = p_3{}^2 = p_4{}^2 = 0$. Die Amplitude wird also IR-divergent für $d \leq 3$ und ist somit für $d = 4 - 2\varepsilon$ frei von weichen IR-Polen.

Ebenso kann man zeigen, dass das Integral frei von kollinearen Divergenzen ist. Dazu verwendet man das bereits gezeigte Ergebnis aus Abschnitt 3.4, dass das Integral $I_n^d$ in der Parametrisierung (3.84) proportional ist zu $\lambda^{d-4}$. Das Boxintegral verbessert dieses Verhalten durch Beiträge im Zähler, denn die Spur ergibt[3]

$$\mathrm{tr}\{\not{q}_1 \not{q}_2 \not{q}_3 \not{q}_4\} = 2(p_1 p_4)(2\lambda^2 k_T^2 + \lambda k_T p_2 - \lambda k_T p_3) \propto \lambda. \qquad (5.23)$$

Das Boxintegral ist also infrarotendlich, denn

$$\Lambda^{BBBB}_{\text{box}} \propto \lambda^{d-4} \cdot \lambda = \lambda^{1-2\epsilon}. \qquad (5.24)$$

[3]Die Auswertung erfolgte mit Hilfe von `FORM`

### 5.1.3 Die Gesamtamplitude

Nachdem alle Beiträge bekannt sind, kann man nun die impulsgeordnete Amplitude angeben. Da man bereits an den einzelnen Beiträgen erkennt, dass ohne Supersymmetrie aufgrund der unterschiedlichen Kopplungen alle Beiträge getrennt voneinander behandelt werden können und keine Kürzungen möglich sind, betrachte ich die impulsgeordnete Amplitude nur im supersymmetrischen Limes,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{BBBB}(p_1,p_2,p_3,p_4) = \\
\frac{1}{8}\Lambda^{BBBB}_{\text{box}}(p_1,p_2,p_3,p_4) + \frac{1}{16}(1+\mathcal{P}_4)\Lambda^{BBBB}_{\text{sg}}(p_1,p_2,p_3,p_4) + \frac{1}{24}\Gamma^{BBBB}_{\text{ct}} = \\
\frac{g^4\mu^{4-d}}{\pi^2}\left\{-\frac{1}{8}\left[4\Delta + 8 - 2\ln\left(\frac{-s_{12}}{\mu^2}\right) - 2\ln\left(\frac{-s_{14}}{\mu^2}\right) + \ln^2\left(\frac{s_{12}}{s_{14}}\right) + \pi^2\right]\right. \\
\left. + \frac{5}{16}\left[2\Delta - \ln\left(\frac{-s_{12}}{\mu^2}\right) - \ln\left(\frac{-s_{14}}{\mu^2}\right) + 4\right]\right\} + \frac{1}{24}\Gamma^{BBBB}_{\text{ct}}.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Der Faktor 5/16 ergibt sich aus

$$\frac{s_{\text{sg}}}{2}\left(9g^4\frac{\mu^{4-d}}{2\pi^2} + g^4\frac{\mu^{4-d}}{2\pi^2}\right) = \frac{1}{16}\left(\frac{10g^4\mu^{4-d}}{2\pi^2}\right) = \frac{5}{16}\frac{g^4\mu^{4-d}}{\pi^2}.$$

Gruppiert man die Terme neu, so erkennt man das Verschwinden aller Divergenzen durch den Counterterm, denn

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{BBBB}(p_1,p_2,p_3,p_4) &= \frac{1}{24}\left[4\cdot 3\cdot 8\left(\frac{5-4}{8}\Delta\frac{g^4\mu^{4-d}}{4\pi^2}\right) + \Gamma^{BBBB}_{\text{ct}}\right] \\
&\quad + \frac{g^4\mu^{4-d}}{16\pi^2}\left[4 - 2\pi^2 - \ln\left(\frac{-s_{12}}{\mu^2}\right) - \ln\left(\frac{-s_{14}}{\mu^2}\right) - 2\ln^2\left(\frac{s_{12}}{s_{14}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{24}\left[\Gamma^{BBBB}_{\text{ct}} + \left(12g^2\mu^{4-d}\right)\frac{\alpha}{\pi}\Delta\right] \\
&\quad + \frac{g^4\mu^{4-d}}{16\pi^2}\left[4 - 2\pi^2 - \ln\left(\frac{-s_{12}}{\mu^2}\right) - \ln\left(\frac{-s_{14}}{\mu^2}\right) - 2\ln^2\left(\frac{s_{12}}{s_{14}}\right)\right]
\end{aligned} \tag{5.26}$$

und in der Tat erfüllt $\Gamma^{BBBB}_{\text{ct}}$ die Gleichung

$$\Gamma^{BBBB}_{\text{ct}} + \left(12g^2\mu^{4-d}\right)\frac{\alpha}{\pi}\Delta = 0, \tag{5.27}$$

so dass die divergenten Terme aus der Amplitude verschwinden.

Als letzter Schritt in der Berechnung der Amplitude verbleibt die Summation über alle Permutationen,

$$\begin{aligned}
\Lambda^{BBBB} &= \sum_{\pi\in\mathcal{S}_4}\mathcal{A}^{BBBB}(p_{\pi(1)},p_{\pi(2)},p_{\pi(3)},p_{\pi(4)}) = \\
&\qquad 8\sum_{\pi\in\mathcal{G}}\mathcal{A}^{BBBB}(p_{\pi(1)},p_{\pi(2)},p_{\pi(3)},p_{\pi(4)}), \quad \mathcal{G} = \mathcal{S}_4/(Z_4\times\mathcal{S}_2),
\end{aligned} \tag{5.28}$$

wobei der letzte Schritt aufgrund der Drehsymmetrie des Problems, das heißt auf Grund der Tatsache, dass die Amplitude vier gleiche äußere Felder besitzt, möglich ist. Diese Summe lässt sich nun problemlos explizit ausführen,

$$\begin{aligned}\Lambda^{BBBB} &= 8\left\{\mathcal{A}^{BBBB}(p_1,p_2,p_3,p_4)+\mathcal{A}^{BBBB}(p_1,p_2,p_4,p_3)+\mathcal{A}^{BBBB}(p_1,p_3,p_2,p_4)\right\} = \\ &\quad \frac{g^4\mu^{4-d}}{2\pi^2}\left\{12-6\pi^2-2\ln\left(\frac{-s_{12}}{\mu^2}\right)-2\ln\left(\frac{-s_{13}}{\mu^2}\right)-2\ln\left(\frac{-s_{14}}{\mu^2}\right)\right. \\ &\quad \left.-\ln^2\left(\frac{s_{12}}{s_{14}}\right)-\ln^2\left(\frac{s_{13}}{s_{14}}\right)-\ln^2\left(\frac{s_{12}}{s_{13}}\right)\right\} \\ &= (-12g^2\mu^{4-d})\frac{\alpha}{\pi}\left\{\pi^2-2+\frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{-s_{12}}{\mu^2}\right)+\ln\left(\frac{-s_{13}}{\mu^2}\right)+\ln\left(\frac{-s_{14}}{\mu^2}\right)\right]\right. \\ &\quad \left.+\frac{1}{6}\left[\ln^2\left(\frac{s_{12}}{s_{14}}\right)+\ln^2\left(\frac{s_{13}}{s_{14}}\right)+\ln^2\left(\frac{s_{12}}{s_{13}}\right)\right]\right\}\end{aligned} \tag{5.29}$$

Hier erkennt man, dass die Wellenfunktionsrenormierung eine explizite Abhängigkeit von der Renormierungsskala in der Vierskalaramplitude bewirkt, da sich das Nicht-Renormierungs-Theorem auf Supergraphen bezieht und keine Aussagen über die Komponentenfelder macht. Trotzdem bewirkt die Supersymmetrie durch die Gleichheit der Kopplungskonstanten eine erhebliche Vereinfachung gegenüber einem nicht-supersymmetrischen Modell.

### 5.1.4 Weitere Vierteilchenamplituden

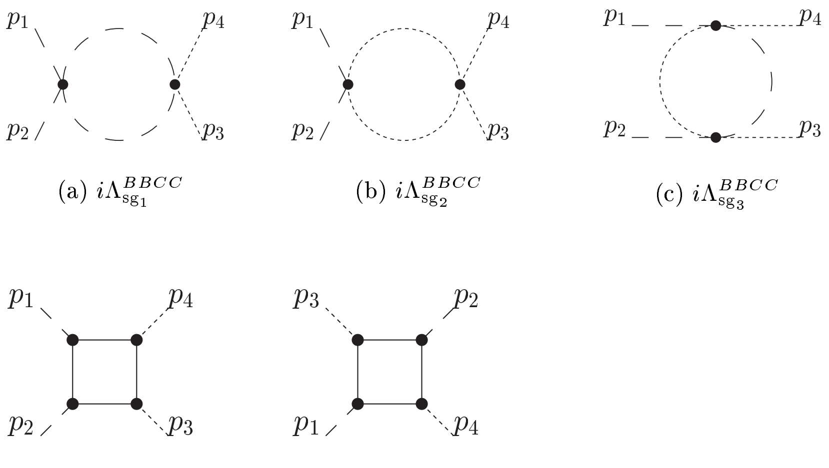
Nach der geleisteten Vorarbeit ist es nun ein Leichtes, aus den schon berechneten Beiträgen weitere Amplituden zu berechnen, nämlich $\Lambda^{CCCC}$ und $\Lambda^{BBCC}$. Aus der Symmetrie des Modells ist zu erwarten, dass $\Lambda^{CCCC} = \Lambda^{BBBB}$ ist, denn ersetzt man in den Diagrammen, die Beiträge zu $\Lambda^{BBBB}$ liefern alle $B$-Linien durch $C$-Linien und umgekehrt, so sieht man sofort, dass alle nicht-fermionischen Diagramme für die Amplitude $\Lambda^{CCCC}$ generiert werden und die gleichen Beiträge erzeugen. Die Boxamplituden unterscheiden sich nur in der Spur, die als Zähler des Integrals auftaucht. Doch auch diese sind identisch, denn man erhält die $\bar{\mathbf{\Psi}}\mathbf{\Psi}C$-Vertizes aus den $\bar{\mathbf{\Psi}}\mathbf{\Psi}B$-Vertizes, indem man einen Faktor $(-i)\mathbb{1}$ durch $\gamma_5$ ersetzt; die Spur der Vierpseudoskalarbox führt man durch vertauschen von $\gamma_5$-Matrizen gemäß $\gamma_5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma_5$ in die Spur der Vierskalarbox über:

$$\mathrm{tr}\{\gamma_5\not{q}_1\gamma_5\not{q}_2\gamma_5\not{q}_3\gamma_5\not{q}_4\} = (-1)^2\mathrm{tr}\{\not{q}_1(\gamma_5)^2\not{q}_2\not{q}_3(\gamma_5)^2\not{q}_4\} = (-i)^4\mathrm{tr}\{\not{q}_1\not{q}_2\not{q}_3\not{q}_4\} \tag{5.30}$$

Anhand dieser kurzen Rechnung überzeugt man sich leicht, dass insgesamt $\Lambda^{BBBB} = \Lambda^{CCCC}$ ist.

Für die Amplitude $\Lambda^{BBCC}$ muss man die Beiträge von $\Lambda^{BBBB}$ in der richtigen Weise kombinieren.

Abbildung 5.3 zeigt die unterschiedlichen Topologien, die in dieser Amplitude auftreten. Betrachten wir zunächst die beiden Boxtopologien, 5.3(d) und 5.3(e). Die dort




(a) $i\Lambda^{BBCC}_{\mathrm{sg}_1}$ (b) $i\Lambda^{BBCC}_{\mathrm{sg}_2}$ (c) $i\Lambda^{BBCC}_{\mathrm{sg}_3}$

(d) $i\Lambda^{BBCC}_{\mathrm{adj}}$ (e) $i\Lambda^{BBCC}_{\mathrm{opp}}$

Abbildung 5.3: Diagramme, die zur $BBCC$-Amplitude beitragen. Von jeder Topologie wurde nur ein Repräsentant gezeichnet, der Counterterm wurde nicht angegeben.

auftretenden Spuren sind, nach Umbenennung der Impulse in der zweiten Spur,

$$(-i)^2\mathrm{tr}\{\not{p}_1\not{p}_2\gamma_5\not{p}_3\gamma_5\not{p}_4\} = -(-i)^2\mathrm{tr}\{\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_3(\gamma_5)^2\not{p}_4\} = (-i)^4\mathrm{tr}\{\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_3\not{p}_4\}, \quad (5.31)$$
$$(-i)^2\mathrm{tr}\{\not{p}_1\gamma_5\not{p}_2\not{p}_3\gamma_5\not{p}_4\} = (-i)^2\mathrm{tr}\{\not{p}_1\not{p}_2(\gamma_5)^2\not{p}_3\not{p}_4\} = -(-i)^4\mathrm{tr}\{\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_3\not{p}_4\}. \quad (5.32)$$

Die Beiträge zur $BBCC$-Amplitude hängen also unmittelbar mit denen der $BBBB$-Amplitude zusammen. Betrachtet man nämlich neben den Spuren, dass

$$V_{BBBB} = V_{CCCC} = 3V_{BBCC},$$

so erhält man folgende Relationen,

$$\Lambda^{BBCC}_{\mathrm{adj}}(p_1,p_2;p_3,p_4) = +\Lambda^{BBBB}_{\mathrm{box}}(p_1,p_2,p_3,p_4), \quad (5.33)$$
$$\Lambda^{BBCC}_{\mathrm{opp}}(p_1,p_2;p_3,p_4) = -\Lambda^{BBBB}_{\mathrm{box}}(p_1,p_4,p_2,p_3), \quad (5.34)$$
$$\Lambda^{BBCC}_{\mathrm{sg}_1}(p_1,p_2;p_3,p_4) = \frac{1}{3}\Lambda^{BBBB}_{\mathrm{sg}_1}(p_1,p_2,p_3,p_4), \quad (5.35)$$
$$\Lambda^{BBCC}_{\mathrm{sg}_2}(p_1,p_2;p_3,p_4) = \frac{1}{3}\Lambda^{BBBB}_{\mathrm{sg}_1}(p_1,p_2,p_3,p_4) \quad \text{und} \quad (5.36)$$
$$\Lambda^{BBCC}_{\mathrm{sg}_3}(p_1,p_2;p_3,p_4) = \frac{2}{9}\Lambda^{BBBB}_{\mathrm{sg}_1}(p_1,p_4,p_2,p_3). \quad (5.37)$$

Der Strichpunkt zwischen dem zweiten und dritten Impuls soll verdeutlichen, dass die Impulse der Skalar- und Pseudoskalarfelder nicht vertauscht werden dürfen. Den Faktor 2/9 in der letzten Amplitude erhält man, da nicht nur an beiden Vertizes ein Faktor 1/3 zwischen $V_{BBBB}$ und $V_{BBCC}$ auftritt, sondern in $\Lambda^{BBCC}_{\mathrm{sg}_3}$ zusätzlich der Symmetriefaktor 1/2 wegfällt, der aufgrund der beiden identischen Propagatoren in $\Lambda^{BBBB}_{\mathrm{sg}_1}$ auftritt. Hieraus setzt man nun problemlos die $BBCC$-Amplitude zusammen, wobei hier auf die Konstruktion einer impulsgeordneten Amplitude verzichtet und direkt die Gesamtamplitude angegeben wird,

$$\begin{aligned}\Lambda^{BBCC}(p_1,p_2;p_3,p_4) &= \Lambda^{BBCC}_{\mathrm{adj}}(p_1,p_2;p_3,p_4) + \Lambda^{BBCC}_{\mathrm{adj}}(p_1,p_2;p_4,p_3)\\ &\quad + \Lambda^{BBCC}_{\mathrm{opp}}(p_1,p_2;p_3,p_4) + \Lambda^{BBCC}_{\mathrm{sg}_1}(p_1,p_2;p_3,p_4) + \Lambda^{BBCC}_{\mathrm{sg}_2}(p_1,p_2;p_3,p_4)\\ &\quad + \Lambda^{BBCC}_{\mathrm{sg}_3}(p_1,p_2;p_3,p_4) + \Lambda^{BBCC}_{\mathrm{sg}_3}(p_1,p_2;p_4,p_3) + \Gamma^{BBCC}_{\mathrm{ct}}\\ &= \Lambda^{BBBB}_{\mathrm{box}}(p_1,p_2,p_3,p_4) + \Lambda^{BBBB}_{\mathrm{box}}(p_1,p_2,p_4,p_3) - \Lambda^{BBBB}_{\mathrm{box}}(p_1,p_4,p_2,p_3)\\ &\quad + \frac{1}{3}\Lambda^{BBBB}_{\mathrm{sg}_1}(p_1,p_2,p_3,p_4) + \frac{1}{3}\Lambda^{BBBB}_{\mathrm{sg}_1}(p_1,p_2,p_3,p_4)\\ &\quad + \frac{2}{9}\Lambda^{BBBB}_{\mathrm{sg}_1}(p_1,p_4,p_2,p_3) + \frac{2}{9}\Lambda^{BBBB}_{\mathrm{sg}_1}(p_1,p_3,p_2,p_4) + \frac{1}{3}\Gamma^{BBBB}_{\mathrm{ct}}. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Das Ergebnis für die $BBCC$-Amplitude erhält man nun durch einfaches Einsetzen der bereits bekannten Beiträge der $BBBB$-Amplitude:

$$\begin{aligned}\Lambda^{BBCC}(p_1,p_2;p_3,p_4) &= \left(-4g^2\mu^{4-d}\right)\frac{\alpha}{\pi}\Big\{\pi^2 - 2\\ &\quad - \ln\left(\frac{-s_{12}}{\mu^2}\right) + \ln\left(\frac{-s_{13}}{\mu^2}\right) + \ln\left(\frac{-s_{14}}{\mu^2}\right)\\ &\quad - \ln^2\left(\frac{s_{14}}{s_{13}}\right) + \ln^2\left(\frac{s_{12}}{s_{13}}\right) + \ln^2\left(\frac{s_{12}}{s_{14}}\right)\Big\} \end{aligned} \tag{5.39}$$

Im Wess-Zumino-Modell können noch weitere Amplituden aus den bislang berechneten gewonnen werden, denn, da das Modell supersymmetrisch ist, kann man dazu sogenannte supersymmetrische Ward-Identitäten ausnutzen. Dies wird in Kapitel 6 explizit ausgeführt.

## 5.2 Die Sechsskalaramplitude

### 5.2.1 Die Struktur der Amplitude

Zur Sechs-Skalar-Amplitude $\Lambda^{BBBBBB}(p_1,p_2,\ldots,p_6)$ tragen sieben Schleifen-Graphen und Zwei Countertermgraphen zusammen mit deren Permutationen bei (s. Abb. 5.4). Ziel der folgenden Rechnungen ist es, zum einen die Amplitude in einer explizit infrarotkonvergenten Weise darzustellen, zum anderen in einer möglichst kleinen Funktionsbasis auszudrücken. Es zeigt sich, dass auf Grund der hohen Symmetrie des Problems sehr viele Kürzungen den Ausdruck vereinfachen. Zunächst wird die Amplitude mit allgemeinen Kopplungen $g_{BBBB}$, $g_{CCCC}$, $g_{BBCC}$, $g_{\bar{\Psi}\Psi B}$ und $g_{\bar{\Psi}\Psi C}$ berechnet um dann getrennt die Vereinfachungen im Grenzfall der supersymmetrischen Theorie, also, wenn alle Kopplungen gleich sind, zu betrachten.

Um diese Kürzungen möglichst einfach zu erreichen, ist die Berechnung einer impulsgeordneten Amplitude $\mathcal{A}(p_1, p_2, \ldots, p_6)$ sinnvoll mit der definierenden Gleichung

$$\Lambda^{BBBBBB}(p_1, p_2, \ldots, p_6) = \sum_{\pi \in \mathcal{S}_6} \mathcal{A}(p_{\pi(1)}, p_{\pi(2)}, \ldots, p_{\pi(6)}), \tag{5.40}$$

wobei $\pi$ alle Permutationen der Indizes durchläuft. Bei der Berechnung der impulsgeordneten Amplitude ist also darauf zu achten, dass alle Beiträge mit den korrekten Symmetriefaktoren versehen werden, die eine Überzählung durch Permutationen, die identische Graphen erzeugen, gerade kompensieren. Die Bestimmung der Symmetriefaktoren kann durch kombinatorische Überlegungen erfolgen oder mit Hilfe von `FORM` und `QGRAF` automatisiert werden. Um zur automatisierten Methode zu gelangen überlegt man sich, dass durch naives Summieren aller Permutationen der sechs äußeren Impulse genau 6! Diagramme gleicher Topologie[4] erzeugt werden. Vergleicht man die Anzahl $n$ der von `QGRAF` erzeugten Diagramme mit der Anzahl der möglichen Permutationen, so erhält man den Symmetriefaktor $s$ des Diagramms

$$s^{-1} = \frac{6!}{n}. \tag{5.41}$$

Der Faktor $s^{-1}$ ist immer eine ganze Zahl, die angibt, wie viele Permutationen der Beine eines Diagramms dieses in sich selbst überführen. Die automatisierte Berechnung wurde lediglich zur Kontrolle der Ergebnisse verwendet, die im folgenden vorgestellt werden.

Der Hexagonbeitrag 5.4(a) wird nur durch Rotationen und Spiegelung in sich übergeführt. Die Symmetriegruppe dieses Graphen wird also von den Permutationen (123456) und (26)(35) erzeugt, und es gilt

$$|\langle(123456), (26)(35)\rangle| = 12. \tag{5.42}$$

Damit erhält man den Symmetriefaktor

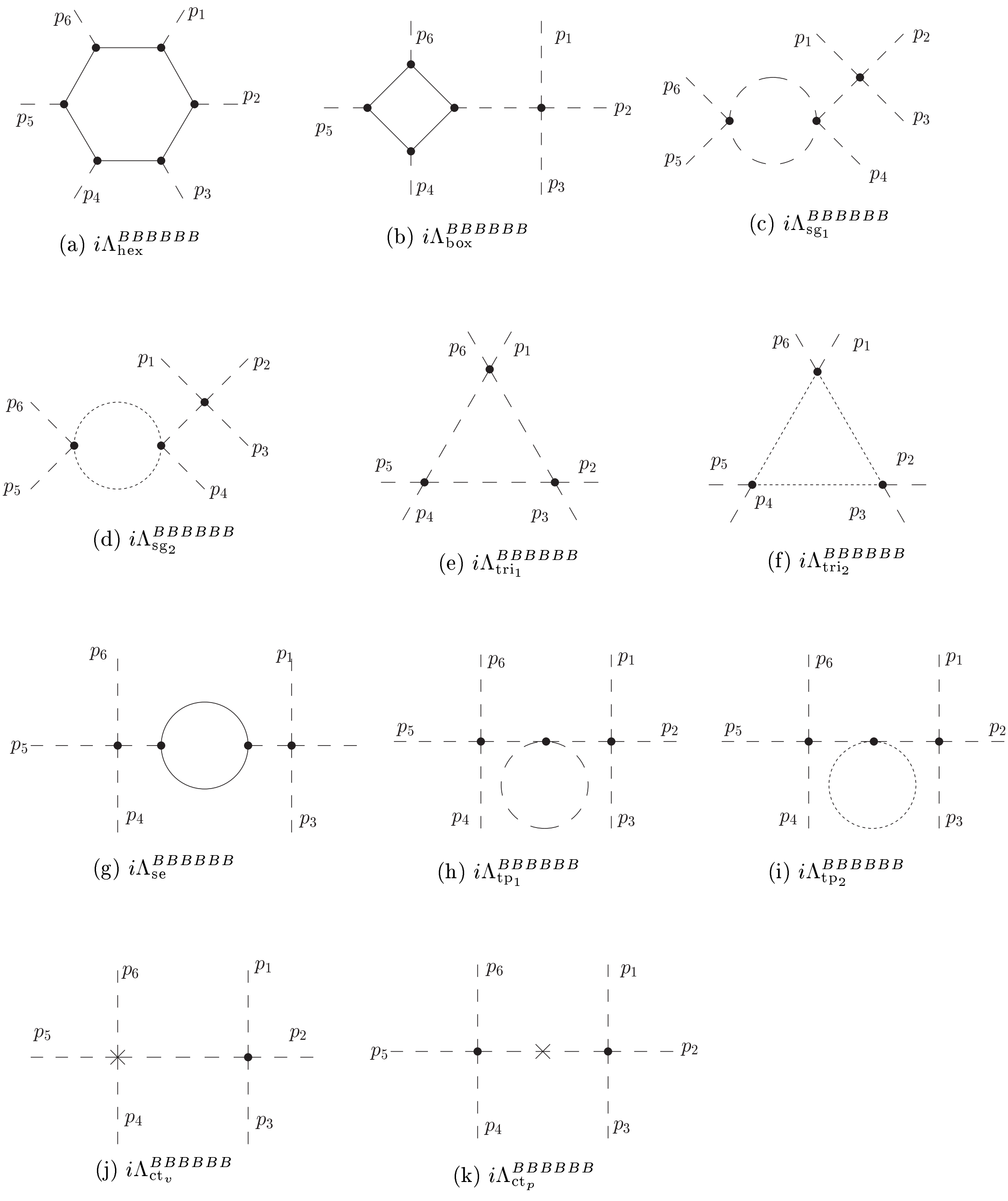
$$s_{\text{hex}} = \frac{1}{12}. \tag{5.43}$$

Des weiteren beobachtet man, dass die Diagramme 5.4(b), 5.4(c) und 5.4(d) isomorphe Symmetriegruppen besitzen. Der Box-Graph wird in sich übergeführt, wenn man die Impulse $p_4$ und $p_6$ oder $p_1$, $p_2$ und $p_3$ untereinander vertauscht. Für die beiden anderen Graphen sind anstatt $p_4$ und $p_6$ die Impulse $p_5$ und $p_6$ zu permutieren. Als Symmetriegruppe erhält man also $\mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_3$, was als Symmetriefaktor

$$s_{\text{box}} = (|\mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_3|)^{-1} = \frac{1}{2! \cdot 3!} = \frac{1}{12} \tag{5.44}$$

induziert.

[4]Es werden eigentlich mehr Diagramme gleicher Topologie erzeugt, welche sich erst nach Einsetzen der Propagatoren unterscheiden. Hier sind alle die Diagramme gemeint, die *nach* dem Einsetzen der Felder aber *vor* dem Zuweisen der Impulse identisch sind.



(a) $i\Lambda^{BBBBBB}_{\mathrm{hex}}$ (b) $i\Lambda^{BBBBBB}_{\mathrm{box}}$ (c) $i\Lambda^{BBBBBB}_{\mathrm{sg}_1}$ (d) $i\Lambda^{BBBBBB}_{\mathrm{sg}_2}$ (e) $i\Lambda^{BBBBBB}_{\mathrm{tri}_1}$ (f) $i\Lambda^{BBBBBB}_{\mathrm{tri}_2}$ (g) $i\Lambda^{BBBBBB}_{\mathrm{se}}$ (h) $i\Lambda^{BBBBBB}_{\mathrm{tp}_1}$ (i) $i\Lambda^{BBBBBB}_{\mathrm{tp}_2}$ (j) $i\Lambda^{BBBBBB}_{\mathrm{ct}_v}$ (k) $i\Lambda^{BBBBBB}_{\mathrm{ct}_p}$

Abbildung 5.4: Diagramme, die zur Sechs-Skalar-Amplitude beitragen. Es wurde jeweils nur eine der möglichen Permutationen der äußeren Impulse angegeben.

Die Dreieck-Diagramme 5.4(e) und 5.4(f) sind invariant sowohl unter Vertauschung der Impulse einer Ecke, als auch unter Permutation der Ecken. Letztere besitzt die Symmetrie-Gruppe $\mathcal{S}_3$, und so ist die Symmetrie-Gruppe des Diagramms isomorph zu $\mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_2$. Das Inverse deren Kardinalität ergibt wiederum den Symmetriefaktor

$$s_{\text{tri}} = \frac{1}{|\mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_2|} = \frac{1}{3! \cdot (2!)^3} = \frac{1}{48}. \tag{5.45}$$

Um zu verdeutlichen, dass auch diese Gruppe eine Untergruppe der $\mathcal{S}_6$ ist, kann man auch ein Erzeugendensystem angeben, nämlich

$$\mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_2 \cong \langle (12)(3)(4)(5)(6), (135)(246), (13)(24)(5)(6) \rangle \tag{5.46}$$

Eine weitere Gruppe von Graphen gleicher Symmetrie besteht aus dem Selbstenergie-Diagramm[5] 5.4(g), den Tadpoles 5.4(h) und 5.4(i) und dem zu diesen drei Diagrammen gehörigen Countertermgraphen 5.4(k). Die Graphen sind symmetrisch bezüglich der Vertauschung der beiden Vierer-Vertizes und bleiben ebenso invariant unter Permutation der Beine jeden Vertizes. Die sich ergebende Symmetriegruppe ist isomorph zu einer $\mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_2$ und wird erzeugt von den Permutationen

$$\langle (123)(4)(5)(6), (12)(3)(4)(5)(6), (14)(25)(36) \rangle.$$

Der Symmetriefaktor der Diagramme ist demnach

$$s_{\text{se}} = \frac{1}{|\mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_2|} = \frac{1}{(3!)^2 \cdot 2!} = \frac{1}{72}. \tag{5.47}$$

Zuletzt bleibt der Symmetriefaktor des Vertexcountertermdiagramms 5.4(j) zu berechnen. Dieser Graph ist ähnlich dem Selbstenergiegraphen, jedoch ist ein Vertauschen der beiden Vertizes nicht mehr möglich. Die verbleibende Symmetriegruppe wird also durch das Vertauschen der Beine je eines Vertizes vorgegeben, und man erhält die zu $\mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_3$ isomorphe Gruppe

$$\langle (123)(4)(5)(6), (12)(3)(4)(5)(6), (1)(2)(3)(456), (1)(2)(3)(4)(56) \rangle.$$

Der sich ergebende Symmetriefaktor ist also

$$s_{\text{ct}_v} = \frac{1}{|\mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_3|} = \frac{1}{(3!)^2} = \frac{1}{36}. \tag{5.48}$$

Den Symmetriefaktor für das Countertermdiagramm 5.4(j) erhält man auch durch die Überlegung, die Fermionschleife in 5.4(b) auf einen Punkt zusammenzuziehen, der den Counterterm repräsentiert. Im Gegensatz zur Box kann man im Countertermdiagramm die Anordnung der Beine an keinem der beiden Vertizes unterscheiden, während bei der Box die Anordnung entlang der Schleife unterschiedliche Topologien liefern konnte. Aufgrund dieser Überlegung muss der Symmetriefaktor $s_{\text{ct}_v}$ um einen Faktor drei geringer

[5] Der sich aus dem Subgraphen ergebende Faktor 1/2 für die Selbstenergieschleife wird an dieser Stelle nicht berücksichtigt, sondern steckt bereits in $\Lambda_{\text{se}}^{BBBBBB}$ selbst.

sein als $s_{\text{box}}$, da aus einer Impulszuordnung am Countertermdiagramm drei unterschiedliche Boxdiagramme entstehen können, wenn man das zusammenziehen rückgängig macht, also

$$s_{\text{ct}_v} = \frac{1}{3} s_{\text{box}} = \frac{1}{36}. \tag{5.49}$$

Einen etwas formaleren, weiteren Zugang zu diesem Symmetriefaktor findet man, wenn man betrachtet, dass die Impulszuordnung am Countertermdiagramm bereits vollständig bestimmt ist, wenn die drei externen Impulse am Countertermvertex ausgewählt wurden, wofür man drei aus sechs Impulsen wählen kann, was kombinatorisch durch den Binomialkoeffizienten

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{720}{36} = 20 \tag{5.50}$$

beschrieben wird; es gibt also $n = 20$ unterschiedliche Diagramme, und wie bereits gezeigt wurde kann der Symmetriefaktor auch als Quotient der Anzahl der Diagramme und der Anzahl der möglichen Permutationen geschrieben werden,

$$s_{\text{ct}_v} = \frac{n}{6!} = \frac{1}{36}. \tag{5.51}$$

Ein naiver Ansatz für die impulsgeordnete Amplitude könnte nun also lauten

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(p_1, p_2, \ldots, p_6) \quad = & \\
& s_{\text{hex}} \Lambda_{\text{hex}}^{BBBBBB}(p_1, \ldots, p_6) \\
+ \quad & s_{\text{box}} \cdot \Big( \Lambda_{\text{box}}^{BBBBBB}(p_1, \ldots, p_6) + \Lambda_{\text{sg}_1}^{BBBBBB}(p_1, \ldots, p_6) \\
& \quad + \Lambda_{\text{sg}_2}^{BBBBBB}(p_1, \ldots, p_6) \Big) \\
+ \quad & s_{\text{tri}} \cdot \left( \Lambda_{\text{tri}_1}^{BBBBBB}(p_1, \ldots, p_6) + \Lambda_{\text{tri}_2}^{BBBBBB}(p_1, \ldots, p_6) \right) \\
+ \quad & s_{\text{se}} \cdot \Big( \Lambda_{\text{se}}^{BBBBBB}(p_1, \ldots, p_6) + \Lambda_{\text{ct}_p}^{BBBBBB}(p_1, \ldots, p_6) \Big) \\
+ \quad & s_{\text{se}} \cdot \Big( \Lambda_{\text{tp}_1}^{BBBBBB}(p_1, \ldots, p_6) + \Lambda_{\text{tp}_2}^{BBBBBB}(p_1, \ldots, p_6) \Big) \\
+ \quad & s_{\text{ct}_v} \Lambda_{\text{ct}_v}^{BBBBBB}(p_1, \ldots, p_6).
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Es fällt jedoch auf, dass zum Beispiel der Beitrag $\Lambda_{\text{tri}_1}^{BBBBBB}(p_1, \ldots, p_6)$ nur von den kinetischen Invarianten $s_{61}$, $s_{23}$ und $s_{45}$ abhängen kann, wohingegen im Hexagonbeitrag $\Lambda_{\text{hex}}^{BBBBBB}$ alle sechs $s_{ij}$ gleichberechtigt vorkommen. Dies zeigt bereits, dass mit dem Ansatz (5.52) die Symmetrie des Problems noch nicht vollständig beschrieben wird und deshalb in diesem Ausdruck nicht alle Vereinfachungen zum Tragen kommen, die eigentlich möglich wären. Um die Symmetrie bestmöglich auszunutzen ist es also nötig, den Ausdruck zu symmetrisieren und zu jedem Diagramm auch alle zyklischen Permutationen zu betrachten, die das Diagramm nicht invariant lassen. Mit dem Zykel

$$\mathcal{P} \equiv (123456) \in \mathcal{S}_6, \tag{5.53}$$

dessen Wirkung auf eine Amplitude durch

$$\mathcal{P}\Lambda(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) = \Lambda(p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_1) \tag{5.54}$$

beschrieben ist, kann man sich eine symmetrisierte, impulsgeordnete Amplitude erzeugen. Ersetzt man in der Amplitude $\mathcal{A}$ nämlich eine beliebige Subamplitude wie folgt,

$$\Lambda(p_1,\ldots,p_6) \longrightarrow \frac{1}{|I|}\sum_{\tilde{\mathcal{P}}\in I}\tilde{\mathcal{P}}\Lambda(p_1,\ldots,p_6), \quad I\subseteq\mathcal{S}_6, \tag{5.55}$$

so verändert sich durch die nachträgliche Summation über alle Permutationen die Amplitude $\Lambda^{BBBBBB}$ nicht. Die symmetrisierte, impulsgeordnete Amplitude erhält man also durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(p_1,p_2,\ldots,p_6) \;=\;& \\
& s_{\text{hex}}\Lambda_{\text{hex}}^{BBBBBB}(p_1,\ldots,p_6) \\
+\;& s_{\text{box}}\cdot\frac{1}{6}\left(1+\mathcal{P}+\mathcal{P}^2+\ldots+\mathcal{P}^5\right) \\
& \quad\Big\{\Lambda_{\text{box}}^{BBBBBB}(p_1,\ldots,p_6)+\Lambda_{\text{sg}_1}^{BBBBBB}(p_1,\ldots,p_6) \\
& \quad+\Lambda_{\text{sg}_2}^{BBBBBB}(p_1,\ldots,p_6)\Big\} \\
+\;& s_{\text{tri}}\cdot\frac{1}{2}\left(1+\mathcal{P}\right)\left(\Lambda_{\text{tri}_1}^{BBBBBB}(p_1,\ldots,p_6)+\Lambda_{\text{tri}_2}^{BBBBBB}(p_1,\ldots,p_6)\right) \\
+\;& s_{\text{se}}\cdot\frac{1}{3}\left(1+\mathcal{P}+\mathcal{P}^2\right) \\
& \quad\times\Big(\Lambda_{\text{se}}^{BBBBBB}(p_1,\ldots,p_6)+\Lambda_{\text{ct}_p}^{BBBBBB}(p_1,\ldots,p_6)\Big) \\
+\;& s_{\text{ct}_v}\cdot\frac{1}{6}\left(1+\mathcal{P}+\mathcal{P}^2+\ldots+\mathcal{P}^5\right)\left(\Lambda_{\text{ct}_v}^{BBBBBB}(p_1,\ldots,p_6)\right).
\end{aligned} \tag{5.56}$$

### 5.2.2 Der Boxbeitrag

Der hier zu berechnende Teilausdruck von $\mathcal{A}$ ist die symmetrisierte, impulsgeordnete Teilamplitude $\mathcal{A}_{\text{box}}$, die nur den Anteil des Boxbeitrags enthält, also

$$\mathcal{A}_{\text{box}}(p_1,\ldots,p_6) = s_{\text{box}}\cdot\frac{1}{6}\left(1+\mathcal{P}+\mathcal{P}^2+\ldots+\mathcal{P}^5\right)\Lambda_{\text{box}}^{BBBBBB}(p_1,\ldots,p_6). \tag{5.57}$$

Dafür wird zunächst $i\Lambda_{\text{box}}^{BBBBBB}$ berechnet. Dieser Ausdruck lautet

$$\begin{aligned}
& i\Lambda_{\text{box}}^{BBBBBB}(p_1,\ldots,p_6) = \\
& \qquad (-1)(-12i\mu^{4-d}g_{BBBB}^2)\frac{i}{s_{123}}(2\mu^{\frac{4-d}{2}}g_{\bar{\Psi}\Psi B})^4\frac{i\mu^{-(4-d)}}{16\pi^2}\text{tr}\left\langle\frac{\not{q}_3\not{q}_4\not{q}_5\not{q}_6}{{q_3}^2{q_4}^2{q_5}^2{q_6}^2}\right\rangle_d
\end{aligned}$$

Die Spur im Zähler des Integrals kann aufgespalten werden in inverse Propagatoren und in Spuren aus äußeren Impulsen, nämlich

$$\begin{aligned}
\text{tr}\{\not{q}_3\not{q}_4\not{q}_5\not{q}_6\} \;=\;& \frac{1}{2}\text{tr}\{\not{p}_{123}\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\} \\
+\;& \frac{1}{2}\left(\text{tr}\{\not{p}_5\not{p}_6\}{q_3}^2+\text{tr}\{\not{p}_6\not{p}_{123}\}{q_4}^2+\text{tr}\{\not{p}_{123}\not{p}_4\}{q_5}^2+\text{tr}\{\not{p}_4\not{p}_5\}{q_6}^2\right) \\
+\;& \frac{1}{2}\text{tr}\{\mathbb{1}\}\left({q_3}^2{q_5}^2+{q_4}^2{q_6}^2\right).
\end{aligned} \tag{5.58}$$

Man kann nun in den einzelnen Termen die Propagatoren kürzen und die verbleibenden Integrale ausführen. Dabei ergibt sich

$$
\begin{aligned}
-i\Lambda_{\text{box}}^{BBBBBB}(p_1,\ldots,p_6) = -\frac{12\cdot g_{BBBB}^2 g_{\bar\Psi\Psi B}^4 \mu^{2(4-d)} i}{s_{123}\pi^2}\Bigg(& \\
&\frac{1}{2}\mathrm{tr}\{\not p_{123}\not p_4\not p_5\not p_6\} I_4^d(p_{123},p_4,p_5,p_6) \\
&+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\{\not p_5\not p_6\} I_3^d(p_{1234},p_5,p_6) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\{\not p_6\not p_{123}\} I_3^d(p_{123},p_{45},p_6) \\
&+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\{\not p_{123}\not p_4\} I_3^d(p_{123},p_4,p_{56}) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\{\not p_4\not p_5\} I_3^d(p_{6123},p_4,p_5) \\
&+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\{\mathbb{1}\}\left(I_2^d(p_{45}) + I_2^d(p_{56})\right)\Bigg)\,. 
\end{aligned}
\tag{5.59}
$$

Nach dem Einsetzen der Gleichungen (8.36), (8.41) und (8.42) erhält man neben den IR-endlichen Beiträgen auch Terme, die einfachen und doppelten IR-Polen entsprechen. Gruppiert man die Amplitude nach den verschiedenen Polen, so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
i\Lambda_{\text{box}}^{BBBBBB}(p_1,\ldots,p_6) = -\frac{12\cdot g_{BBBB} g_{\bar\Psi\Psi B}^4 \mu^{2(4-d)} i}{\pi^2}\frac{1}{s_{123}}\Bigg(& \\
&\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{tr}\{\not p_{123}\not p_4\not p_5\not p_6\}}{s_{45}s_{56}} + \frac{\mathrm{tr}\{\not p_4\not p_5\}}{s_{45}}\right]\frac{r_\Gamma}{\varepsilon^2}(-s_{45})^{-\varepsilon} \\
&+\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{tr}\{\not p_{123}\not p_4\not p_5\not p_6\}}{s_{45}s_{56}} + \frac{\mathrm{tr}\{\not p_5\not p_6\}}{s_{56}}\right]\frac{r_\Gamma}{\varepsilon^2}(-s_{56})^{-\varepsilon} \\
&+\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{tr}\{\not p_{123}\not p_4\not p_5\not p_6\}}{s_{45}s_{56}} + \frac{\mathrm{tr}\{\not p_6\not p_{123}\}}{s_{45}-s_{123}}\right]\frac{r_\Gamma}{\varepsilon^2}\left((-s_{45})^{-\varepsilon} - (-s_{123})^{-\varepsilon}\right) \\
&+\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{tr}\{\not p_{123}\not p_4\not p_5\not p_6\}}{s_{45}s_{56}} + \frac{\mathrm{tr}\{\not p_{123}\not p_4\}}{s_{56}-s_{123}}\right]\frac{r_\Gamma}{\varepsilon^2}\left((-s_{56})^{-\varepsilon} - (-s_{123})^{-\varepsilon}\right) \\
&-2\frac{\mathrm{tr}\{\not p_{123}\not p_4\not p_5\not p_6\}}{2s_{45}s_{56}}F_1(s_{45},s_{56},s_{123}) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\{\mathbb{1}\}\left(I_2^d(p_{45}) + I_2^d(p_{56})\right)\Bigg)\,.
\end{aligned}
\tag{5.60}
$$

Die Koeffizienten der Pole sind jedoch alle identisch Null, denn für die Werte der Spuren errechnet man $\mathrm{tr}\{\not p_{123}\not p_4\not p_5\not p_6\} = -2s_{45}s_{56}$, $\mathrm{tr}\{\not p_{123}\not p_4\} = 2s_{56} - 2s_{123}$, $\mathrm{tr}\{\not p_6\not p_{123}\} = 2s_{45} - 2s_{123}$, $\mathrm{tr}\{\not p_4\not p_5\} = 2s_{45}$ sowie $\mathrm{tr}\{\not p_5\not p_6\} = 2s_{56}$.

Nach dem Wegfallen sämtlicher IR-Pole verkürzt sich der Ausdruck wesentlich, und man kann bereits den Boxbeitrag zur impulsgeordnete Amplitude angeben,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\text{box}}(p_1,\ldots,p_6) = -\frac{1}{6}g_{BBBB}^2 g_{\bar\Psi\Psi B}^4 \frac{\mu^{2(4-d)}}{\pi^2}& \\
&\left(\frac{1}{s_{123}}\left(2F_1(s_{45},s_{56},s_{123}) + 4I_2^d(p_{45})\right) + 5 \text{ zykl. Perm.}\right)\,.
\end{aligned}
\tag{5.61}
$$

### 5.2.3 Der Hexagonbeitrag

Der wohl am aufwändigsten zu berechnende Anteil der Gesamtamplitude ist der Hexagonbeitrag $\mathcal{A}_{\text{hex}}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\text{hex}} &= s_{\text{hex}}\Lambda_{\text{hex}}^{BBBBBB}(p_1,\ldots,p_6)\\ &= -\frac{1}{12}\left(2g_{\bar{\Psi}\Psi B}\mu^{\frac{4-d}{2}}\right)^6\frac{\mu^{-(4-d)}}{16\pi^2}\text{tr}\left\langle\frac{\not{q}_1\not{q}_2\not{q}_3\not{q}_4\not{q}_5\not{q}_6}{q_1{}^2q_2{}^2q_3{}^2q_4{}^2q_5{}^2q_6{}^2}\right\rangle_d.\end{aligned}\tag{5.62}$$

Um diese zu vereinfachen wird zunächst die Spur aus der Fermionschleife berechnet und die entstehenden Zähler quadratisch ergänzt. Führt man nach dem Kürzen der so entstehenden inversen Propagatoren die Integration durch, so erhält man skalare Drei-, Vier-, Fünf- und Sechspunktintegrale. Bei deren Reduktion stellt sich heraus, dass ein Teil der Beiträge bereits vor der Reduktion der Vierpunktintegrale eliminiert werden kann; letztere Reduktion wird die IR-Polstruktur der Amplitude sichtbar, und man stellt fest, dass sämtliche IR-Pole und ebenso ein Teil der endlichen Beiträge verschwinden. Die folgende Rechnung stützt sich im wesentlichen auf die Arbeit [BGHS01].

Zuerst muss es gelingen, die Integrationsvariable $k$ aus der Spur zu separieren. Dazu wird die Spur einfach ausgeführt und man erhält eine Linearkombination aus Produkten von inversen Propagatoren. Dies wird deutlich, wenn man durch wiederholtes Anwenden der Antikommutatoridentität $\not{q}_i\not{q}_j = -\not{q}_j\not{q}_i + 2q_iq_j$ die Spur reduziert zu

$$\begin{aligned}&\text{tr}\{\not{q}_1\not{q}_2\not{q}_3\not{q}_4\not{q}_5\not{q}_6\} =\\ &\qquad q_1q_2\text{tr}\{\not{q}_3\not{q}_4\not{q}_5\not{q}_6\} - q_1q_3\text{tr}\{\not{q}_2\not{q}_4\not{q}_5\not{q}_6\} + q_1q_4\text{tr}\{\not{q}_2\not{q}_3\not{q}_5\not{q}_6\}\\ &\qquad\qquad - q_1q_5\text{tr}\{\not{q}_2\not{q}_3\not{q}_4\not{q}_6\} + q_1q_6\text{tr}\{\not{q}_2\not{q}_3\not{q}_4\not{q}_5\}\end{aligned}\tag{5.63}$$

und dann die Gleichung (5.58) einsetzt. Die verbleibenden Produkte $q_iq_j$ ersetzt man durch quadratische Ergänzung mit

$$q_iq_j = -\frac{1}{2}(r_j - r_i)^2 + \frac{1}{2}(q_i{}^2 + q_j{}^2).\tag{5.64}$$

Die Berechnung der Spur liefert in den Zwischenschritten sehr viele Terme, die man, ähnlich wie in (5.58) wieder durch Spuren über äußere Impulse vereinfachen kann. Deshalb wurde dieser Teil der Rechnung ausschließlich in `FORM` implementiert, und auf die Angabe von Zwischenergebnissen wird hier verzichtet. Nach Kürzung der Propagatoren und Integration erhält man schließlich

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\mathrm{hex}} \quad = \quad & -\frac{g^6_{\bar{\Psi}\Psi B}\mu^{2(4-d)}}{6\pi^2}\Bigg[ \\
& \mathrm{tr}\{\mathbb{1}\}I_3^d(p_{12},p_{34},p_{56}) + \mathrm{tr}\{\mathbb{1}\}I_3^d(p_{23},p_{45},p_{61}) \\
& +\mathrm{tr}\{\not{p}_1\not{p}_2\}I_4^d(p_1,p_2,p_{34},p_{56}) + \mathrm{tr}\{\not{p}_2\not{p}_3\}I_4^d(p_2,p_3,p_{45},p_{61}) \\
& +\mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\}I_4^d(p_3,p_4,p_{56},p_{12}) + \mathrm{tr}\{\not{p}_4\not{p}_5\}I_4^d(p_4,p_5,p_{61},p_{23}) \\
& +\mathrm{tr}\{\not{p}_5\not{p}_6\}I_4^d(p_5,p_6,p_{12},p_{34}) + \mathrm{tr}\{\not{p}_6\not{p}_1\}I_4^d(p_6,p_1,p_{23},p_{45}) \\
& +\mathrm{tr}\{\not{p}_1\not{p}_4\}I_4^d(p_1,p_{23},p_4,p_{56}) + \mathrm{tr}\{\not{p}_2\not{p}_5\}I_4^d(p_2,p_{34},p_5,p_{61}) \\
& +\mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_6\}I_4^d(p_3,p_{45},p_6,p_{12}) \\
& +\mathrm{tr}\{\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_3\not{p}_4\}I_5^d(p_1,p_2,p_3,p_4,p_{56}) \\
& +\mathrm{tr}\{\not{p}_2\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\}I_5^d(p_2,p_3,p_4,p_5,p_{61}) \\
& +\mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\}I_5^d(p_3,p_4,p_5,p_6,p_{12}) \\
& +\mathrm{tr}\{\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\not{p}_1\}I_5^d(p_4,p_5,p_6,p_1,p_{23}) \\
& +\mathrm{tr}\{\not{p}_5\not{p}_6\not{p}_1\not{p}_2\}I_5^d(p_5,p_6,p_1,p_2,p_{34}) \\
& +\mathrm{tr}\{\not{p}_6\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_3\}I_5^d(p_6,p_1,p_2,p_3,p_{45}) \\
& + \mathrm{tr}\{\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\}I_6^d(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6)\Bigg]. \qquad (5.65)
\end{aligned}
$$

Der erste Schritt im weiteren Vorgehen ist die Reduktion des Sechspunktintegrals $I_6^d(p_1,\ldots,p_6)$ nach Gleichung (3.76). Dort wurde bereits gezeigt, dass für $n=6$ kein $d+2$-dimensionales Integral auftritt und man kann das Sechspunktintegral schreiben als

$$
\begin{aligned}
& I_6^d(p_1,\ldots,p_6) = \\
& \qquad b_1 I_5^d(p_{12},p_3,p_4,p_5,p_6) + b_2 I_5^d(p_{23},p_4,p_5,p_6,p_1) + b_3 I_5^d(p_{34},p_5,p_6,p_1,p_2) \\
& \quad + b_4 I_5^d(p_{45},p_6,p_1,p_2,p_3) + b_5 I_5^d(p_{56},p_1,p_2,p_3,p_4) + b_6 I_5^d(p_{61},p_2,p_3,p_4,p_5). \qquad (5.66)
\end{aligned}
$$

Die Bestimmung dieser Konstanten erfolgt über das Gleichungssystem

$$S\mathbf{b} = \mathbf{a} \quad \text{(vgl. 3.4.2)}, \qquad (5.67)$$

wobei die Matrix $S$ hier die spezielle Form

$$S = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & s_{23} & s_{234} & s_{61} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{34} & s_{345} & s_{12} \\ s_{23} & 0 & 0 & 0 & s_{45} & s_{123} \\ s_{234} & s_{34} & 0 & 0 & 0 & s_{56} \\ s_{61} & s_{345} & s_{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{12} & s_{123} & s_{56} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (5.68)$$

besitzt. Für die weitere Rechnung wird allerdings die Matrix

$$\hat{S} = -2S \qquad (5.69)$$

verwendet. In [BGHS01] wird gezeigt, dass die Lösung des Gleichungssystems darstellbar ist als

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{\det \hat{S}} \left[ \mathrm{tr}_6 \mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\} - 2 s_{34} s_{45} s_{56} \mathrm{tr}\{\not{p}_6\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_3\} \right], & (5.70)\\
b_2 &= \frac{1}{\det \hat{S}} \left[ \mathrm{tr}_6 \mathrm{tr}\{\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\not{p}_1\} - 2 s_{45} s_{56} s_{61} \mathrm{tr}\{\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_3\not{p}_4\} \right], & (5.71)\\
b_3 &= \frac{1}{\det \hat{S}} \left[ \mathrm{tr}_6 \mathrm{tr}\{\not{p}_5\not{p}_6\not{p}_1\not{p}_2\} - 2 s_{56} s_{61} s_{12} \mathrm{tr}\{\not{p}_2\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\} \right], & (5.72)\\
b_4 &= \frac{1}{\det \hat{S}} \left[ \mathrm{tr}_6 \mathrm{tr}\{\not{p}_6\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_3\} - 2 s_{61} s_{12} s_{23} \mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\} \right], & (5.73)\\
b_5 &= \frac{1}{\det \hat{S}} \left[ \mathrm{tr}_6 \mathrm{tr}\{\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_3\not{p}_4\} - 2 s_{12} s_{23} s_{34} \mathrm{tr}\{\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\not{p}_1\} \right], & (5.74)\\
b_6 &= \frac{1}{\det \hat{S}} \left[ \mathrm{tr}_6 \mathrm{tr}\{\not{p}_2\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\} - 2 s_{23} s_{34} s_{45} \mathrm{tr}\{\not{p}_5\not{p}_6\not{p}_1\not{p}_2\} \right] \quad \text{mit} & (5.75)\\
\det \hat{S} &= 4 s_{12} s_{23} s_{34} s_{45} s_{56} s_{61} - \mathrm{tr}_6{}^2 \quad \text{und} & (5.76)\\
\mathrm{tr}_6 &= \mathrm{tr}\{\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\}. & (5.77)
\end{aligned}
$$

Mit diesen Relationen lassen sich nun die Vorfaktoren der $I_5^d$-Integrale zusammenfassen, denn betrachtet man zum Beispiel die Koeffizienten von $I_5^d(p_3, p_4, p_5, p_6, p_{12})$ in $A_{\mathrm{hex}}$, so findet man

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\} + \mathrm{tr}_6 b_1 \\
&\qquad = \mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\} + \frac{\mathrm{tr}_6}{\det \hat{S}} \left[ \mathrm{tr}_6 \mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\} - 2 s_{34} s_{45} s_{56} \mathrm{tr}\{\not{p}_6\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_3\} \right] \\
&\qquad = \frac{1}{\det \hat{S}} \left[ \left( \det \hat{S} + \mathrm{tr}_6^2 \right) \mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\} - 2 \mathrm{tr}_6 s_{34} s_{45} s_{56} \mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\} \right] \\
&\quad = \frac{1}{\det \hat{S}} \left[ 4 s_{12} s_{23} \left( s_{34} s_{45} s_{56} \right) s_{61} \mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\} - 2 \left( s_{34} s_{45} s_{56} \right) \mathrm{tr}_6 \mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\} \right] \\
&\qquad\qquad = -2 s_{34} s_{45} s_{56} b_4. \qquad (5.78)
\end{aligned}
$$

Der verbleibende Ausdruck für den Hexagonbeitrag ist somit

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\text{hex}} \quad = \quad & -\frac{g^6_{\bar{\Psi}\Psi B}\mu^{2(4-d)}}{6\pi^2} \\
& \Big[\mathrm{tr}\{\mathbb{1}\}I_3^d(p_{12},p_{34},p_{56}) + \mathrm{tr}\{\mathbb{1}\}I_3^d(p_{23},p_{45},p_{61}) \\
& +\mathrm{tr}\{\not{p}_1\not{p}_2\}I_4^d(p_1,p_2,p_{34},p_{56}) + \mathrm{tr}\{\not{p}_2\not{p}_3\}I_4^d(p_2,p_3,p_{45},p_{61}) \\
& +\mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\}I_4^d(p_3,p_4,p_{56},p_{12}) + \mathrm{tr}\{\not{p}_4\not{p}_5\}I_4^d(p_4,p_5,p_{61},p_{23}) \\
& +\mathrm{tr}\{\not{p}_5\not{p}_6\}I_4^d(p_5,p_6,p_{12},p_{34}) + \mathrm{tr}\{\not{p}_6\not{p}_1\}I_4^d(p_6,p_1,p_{23},p_{45}) \\
& +\mathrm{tr}\{\not{p}_1\not{p}_4\}I_4^d(p_1,p_{23},p_4,p_{56}) + \mathrm{tr}\{\not{p}_2\not{p}_5\}I_4^d(p_2,p_{34},p_5,p_{61}) \\
& +\mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_6\}I_4^d(p_3,p_{45},p_6,p_{12}) \\
& -2s_{12}s_{23}s_{34}b_2I_5^d(p_1,p_2,p_3,p_4,p_{56}) \\
& -2s_{23}s_{34}s_{45}b_3I_5^d(p_2,p_3,p_4,p_5,p_{61}) \\
& -2s_{34}s_{45}s_{56}b_4I_5^d(p_3,p_4,p_5,p_6,p_{12}) \\
& -2s_{45}s_{56}s_{61}b_5I_5^d(p_4,p_5,p_6,p_1,p_{23}) \\
& -2s_{56}s_{61}s_{12}b_6I_5^d(p_5,p_6,p_1,p_2,p_{34}) \\
& -2s_{61}s_{12}s_{23}b_1I_5^d(p_6,p_1,p_2,p_3,p_{45})\Big]\,. 
\end{aligned}
\tag{5.79}
$$

Als nächsten Schritt reduziert man die Pentagonintegrale $I_5^d$ zu Boxintegralen. Eine Darstellung der zugehörigen Reduktionsformel (3.76) ist im Anhang unter (8.27ff.) angegeben. Da man in diesem Schritt sehr viele Terme erzeugt, ist es günstig die Terme so zu gruppieren, dass es genügt, eine Permutation explizit anzugeben.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\text{hex}} = -\frac{g^6_{\bar{\Psi}\Psi B}\mu^{2(4-d)}}{6\pi^2} & \Big[\frac{1}{3}\mathrm{tr}\{\mathbb{1}\}I_3^d(p_{12},p_{34},p_{56}) \\
& - 2\left(s_{23}s_{34}s_{45}b_{3;1} + s_{34}s_{45}s_{56}b_{4;5}\right) I_4^d(p_3,p_4,p_5,p_{612}) \\
& + \left(\mathrm{tr}\{\not{p}_5\not{p}_6\} - 2s_{34}s_{45}s_{56}b_{4;2} - 2s_{56}s_{61}s_{12}b_{6;4}\right) I_4^d(p_5,p_6,p_{12},p_{34}) \\
& + \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_6\} - 2s_{34}s_{45}s_{56}b_{4;3} - 2s_{61}s_{12}s_{23}b_{1;3}\right) I_4^d(p_3,p_{45},p_6,p_{12})\Big] \\
& + 5 \text{ zyklische Permutationen.}
\end{aligned}
\tag{5.80}
$$

Nun genügt es, aufgrund der Symmetrie des Problems, alle weiteren Vereinfachungen an einer der sechs Permutationen durchzuführen, da die Argumente für alle weiteren Terme durch zyklisches Vertauschen der Indizes folgt.

Es soll nun gezeigt werden, dass alle Integrale der Form $I_4^d(p_3,p_{45},p_6,p_{12})$ aus dem Ergebnis verschwinden, da ihre Koeffizienten Null sind. Dazu setzen wir zunächst die Reduktionskoeffizienten

$$
\begin{aligned}
-2s_{34}s_{45}s_{56}b_{4;3} &= \mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\}b_4 \quad \text{und} \\
-2s_{61}s_{12}s_{23}b_{1;3} &= \mathrm{tr}\{\not{p}_6\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_3\}b_1
\end{aligned}
$$

ein. Um den Koeffizienten

$$C_4^{\mathrm{op}} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_6\} + \mathrm{tr}\{\not{p}_6\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_3\}b_1 + \mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\}b_4\right] \tag{5.81}$$

zu vereinfachen, muss er vorher auf eine spurfreie Form gebracht werden, indem man die Spuren durch die entsprechenden Ausdrücke

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\{\not{p}_6\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_3\} &= -E_1 + (s_{123} - s_{12})s_{61} + (s_{345} - s_{12})s_{23} && (5.82)\\
\mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\} &= -E_1 + (s_{123} - s_{45})s_{34} + (s_{345} - s_{45})s_{56} && (5.83)\\
\frac{1}{2}\mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_6\} &= -s_{123} + s_{12} - s_{345} + s_{45} && (5.84)
\end{aligned}$$

ersetzt und aus dem Gleichungssystem (5.67) die passenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
s_{34}b_4 &= 1 - s_{345}b_5 - s_{12}b_6, && (5.85)\\
s_{56}b_4 &= 1 - s_{123}b_3 - s_{12}b_2, && (5.86)\\
s_{61}b_1 &= 1 - s_{345}b_2 - s_{45}b_3, && (5.87)\\
s_{23}b_1 &= 1 - s_{123}b_6 - s_{45}b_5 && (5.88)
\end{aligned}$$

verwendet, wobei $E_1$ in (8.33) definiert wird,

$$E_1 = s_{123}s_{345} - s_{12}s_{45}.$$

Man erhält also

$$\begin{aligned}
2C_4^{\mathrm{op}} &= \{-E_1 b_1\\
&\quad + (s_{123} - s_{12})\,(1 - s_{345}b_2 - s_{45}b_3)\\
&\quad + (s_{345} - s_{12})\,(1 - s_{123}b_6 - s_{45}b_5)\}\\
&+ \{-E_1 b_4\\
&\quad + (s_{123} - s_{45})\,(1 - s_{345}b_5 - s_{12}b_6)\\
&\quad + (s_{345} - s_{45})\,(1 - s_{123}b_3 - s_{12}b_2)\}\\
&+ 2\,\{s_{12} - s_{123} + s_{45} - s_{345}\} && (5.89)\\
&= -E_1\,(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6) = -BE_1. && (5.90)
\end{aligned}$$

Die rechte Seite verschwindet wegen $B = 0$, was bereits in der Herleitung von (3.93) diskutiert wurde.

Um weitere Vereinfachungen zu erzielen ist es notwendig, sowohl die Koeffizienten $b_{i;j}$ explizit einzusetzen, als auch die Reduktion für die Vierpunktintegrale durchzuführen (s. (8.36), (8.37)). Beide Vier-Punkt-Integrale besitzen sowohl doppelte Pole, wie z. B. $P_{56}^{(2)} = \frac{r_\Gamma}{\varepsilon^2}(-s_{56})^{-\varepsilon}$, als auch einfache Pole, wie

$$\begin{aligned}
P_{34}^{(1)} &\equiv \frac{r_\Gamma}{\varepsilon^2}\left[(-s_{34})^{-\varepsilon} - (-s_{345})^{-\varepsilon}\right] \quad \text{und} && (5.91)\\
\tilde{P}_{45}^{(1)} &\equiv \frac{r_\Gamma}{\varepsilon^2}\left[(-s_{45})^{-\varepsilon} - (-s_{345})^{-\varepsilon}\right]. && (5.92)
\end{aligned}$$

In dieser Notation lauten die Integrale

$$
\begin{aligned}
s_{34}s_{45}I_4^d(p_3,p_4,p_5,p_{612}) &= P_{34}^{(1)} + \tilde{P}_{45}^{(1)} + P_{34}^{(2)} + P_{45}^{(2)} - 2F_1(s_{34},s_{45},s_{345}), && (5.93)\\
s_{56}s_{345}I_4^d(p_5,p_6,p_{12},p_{34}) &= -P_{34}^{(1)} - \tilde{P}_{12}^{(1)} + P_{56}^{(2)} - 2F_2(s_{56},s_{345},s_{12},s_{34}), && (5.94)
\end{aligned}
$$

und die Amplitude besitzt die Form

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\text{hex}} = &-\frac{g_{\bar{\Psi}\Psi B}^6 \mu^{2(4-d)}}{6\pi^2}\Bigg\{\frac{1}{3}\text{tr}\{\mathbb{1}\}I_3^d(p_{12},p_{34},p_{56})\\
&-\left(\frac{b_3}{E_3}\left[2s_{23}(s_{345}-s_{34}) - \text{tr}\{\not{p}_2\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\}\right] + \frac{b_4}{E_1}\left[2s_{56}(s_{345}-s_{45}) - \text{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\}\right]\right)\\
&\qquad\times\left\{P_{34}^{(1)} + \tilde{P}_{45}^{(1)} + P_{34}^{(2)} + P_{45}^{(2)} - 2F_1(s_{34},s_{45},s_{345})\right\}\\
&+\frac{1}{s_{345}}\Bigg(2\left[s_{34}b_4 + s_{345}b_5 + s_{12}b_6\right] - \frac{b_4}{E_1}\left[s_{345}\text{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\} + 2s_{34}s_{45}(s_{345}-s_{12})\right]\\
&\qquad-\frac{b_6}{E_3}\left[s_{345}\text{tr}\{\not{p}_5\not{p}_6\not{p}_1\not{p}_2\} + 2s_{61}s_{12}(s_{345}-s_{34})\right]\Bigg)\\
&\qquad\times\left\{-P_{34}^{(1)} - \tilde{P}_{12}^{(1)} + P_{56}^{(2)} - 2F_2(s_{56},s_{345},s_{12},s_{34})\right\}\Bigg\}\\
&\qquad+ 5 \text{ zyklische Permutationen}\\
= &-\frac{g_{\bar{\Psi}\Psi B}^6 \mu^{2(4-d)}}{6\pi^2}\Bigg\{\frac{1}{3}\text{tr}\{\mathbb{1}\}I_3^d(p_{12},p_{34},p_{56})\\
&+\left(\frac{b_3}{E_3}\left[\text{tr}\{\not{p}_2\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\} - 2s_{23}(s_{345}-s_{34})\right] + \frac{b_4}{E_1}\left[\text{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\} - 2s_{56}(s_{345}-s_{45})\right]\right)\\
&\qquad\times\left\{P_{34}^{(1)} + \tilde{P}_{45}^{(1)} + P_{34}^{(2)} + P_{45}^{(2)} - 2F_1(s_{34},s_{45},s_{345})\right\}\\
&+\left(2b_5 + \frac{b_4}{E_1}\left[2s_{34}(s_{123}-s_{45}) - \text{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\}\right] + \frac{b_6}{E_3}\left[2s_{12}(s_{234}-s_{61}) - \text{tr}\{\not{p}_5\not{p}_6\not{p}_1\not{p}_2\}\right]\right)\\
&\qquad\times\left\{-P_{34}^{(1)} - \tilde{P}_{12}^{(1)} + P_{56}^{(2)} - 2F_2(s_{56},s_{345},s_{12},s_{34})\right\}\Bigg\}\\
&\qquad+ 5 \text{ zyklische Permutationen.} \qquad (5.95)
\end{aligned}
$$

Dieses Ergebnis wurde erzielt, indem die Spur $\text{tr}\{\not{p}_5\not{p}_6\}$ mit Hilfe des Gleichungssystems (5.67) umgeformt wurde zu

$$
\begin{aligned}
\text{tr}\{\not{p}_5\not{p}_6\} &= 2s_{56}\cdot 1\\
&\overset{(5.67)}{=} 2s_{56}\left(s_{34}b_4 + s_{345}b_5 + s_{12}b_6\right) = 2s_{56}\left((s_{34}E_1)\frac{b_4}{E_1} + s_{345}b_5 + (s_{12}E_3)\frac{b_6}{E_3}\right)\\
&= 2s_{56}\left(s_{34}(s_{345}s_{123} - s_{12}s_{45})\frac{b_4}{E_1} + s_{345}b_5 + s_{12}(s_{345}s_{234} - s_{34}s_{61})\frac{b_6}{E_3}\right); \qquad (5.96)
\end{aligned}
$$

nachdem man die Terme neu sortiert und zusammenfasst, lässt sich $s_{345}$ kürzen.

Die Strategie wird nun die sein, *gleiche* Pole aus *allen* Permutationen zu kombinieren. Man kann so den Polanteil der Amplitude in drei Beiträge zerlegen, nämlich in zwei Anteile für die einfachen Pole,

$$
\begin{aligned}
P^{(1)} = \frac{b_3}{E_3}\left[\mathrm{tr}\{\not p_2\not p_3\not p_4\not p_5\} - 2s_{23}(s_{345}-s_{34})\right] P_{34}^{(1)} \\
+ \frac{b_4}{E_1}\left[\mathrm{tr}\{\not p_3\not p_4\not p_5\not p_6\} - 2s_{56}(s_{345}-s_{45})\right] P_{34}^{(1)} \\
- 2b_5 P_{34}^{(1)} - \frac{b_4}{E_1}\left[2s_{34}(s_{123}-s_{45}) - \mathrm{tr}\{\not p_3\not p_4\not p_5\not p_6\}\right] P_{34}^{(1)} \\
- \frac{b_6}{E_3}\left[2s_{12}(s_{234}-s_{61}) - \mathrm{tr}\{\not p_5\not p_6\not p_1\not p_2\}\right] P_{34}^{(1)} + 5 \text{ zyklische Permutationen} \\
= \Bigg\{ \frac{2b_4}{E_1}\left[\mathrm{tr}\{\not p_3\not p_4\not p_5\not p_6\} - s_{56}(s_{345}-s_{45}) - s_{34}(s_{123}-s_{45})\right] - 2b_5 \\
+ \frac{1}{E_3}\left[2C_3^{\mathrm{op}} - \mathrm{tr}\{\not p_2\not p_5\} - 2s_{23}(s_{345}-s_{34})b_3 - 2s_{12}(s_{234}-s_{61})b_6\right]\Bigg\} P_{34}^{(1)} \\
+ 5 \text{ zyklische Permutationen}
\end{aligned}
\tag{5.97}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\tilde P^{(1)} = \frac{b_3}{E_3}\left[\mathrm{tr}\{\not p_2\not p_3\not p_4\not p_5\} - 2s_{23}(s_{345}-s_{34})\right] \tilde P_{45}^{(1)} \\
+ \frac{b_4}{E_1}\left[\mathrm{tr}\{\not p_3\not p_4\not p_5\not p_6\} - 2s_{56}(s_{345}-s_{45})\right] \tilde P_{45}^{(1)} \\
- 2b_5 \tilde P_{12}^{(1)} - \frac{b_4}{E_1}\left[2s_{34}(s_{123}-s_{45}) - \mathrm{tr}\{\not p_3\not p_4\not p_5\not p_6\}\right] \tilde P_{12}^{(1)} \\
- \frac{b_6}{E_3}\left[2s_{12}(s_{234}-s_{61}) - \mathrm{tr}\{\not p_5\not p_6\not p_1\not p_2\}\right] \tilde P_{12}^{(1)} + 5 \text{ zykl. Permutationen} \\
= \Bigg\{ \frac{b_6}{E_3}\left[\mathrm{tr}\{\not p_5\not p_6\not p_1\not p_2\} - 2s_{56}(s_{345}-s_{61})\right] + \frac{b_1}{E_1}\left[\mathrm{tr}\{\not p_6\not p_1\not p_2\not p_3\} - 2s_{23}(s_{345}-s_{12})\right] \\
- 2b_5 + \frac{b_4}{E_1}\left[\mathrm{tr}\{\not p_3\not p_4\not p_5\not p_6\} - 2s_{34}(s_{123}-s_{45})\right] \\
+ \frac{b_6}{E_3}\left[\mathrm{tr}\{\not p_5\not p_6\not p_1\not p_2\} - 2s_{12}(s_{234}-s_{61})\right]\Bigg\} \tilde P_{12}^{(1)} + 5 \text{ zykl. Permutationen}
\end{aligned}
\tag{5.98}
$$

sowie die doppelten Pole

$$\begin{aligned}
P^{(2)} = \Bigg\{ & \frac{b_3}{E_3}\left[\mathrm{tr}\{\not p_2 \not p_3 \not p_4 \not p_5\} - 2s_{23}(s_{345} - s_{34})\right] P_{34}^{(2)} \\
& + \frac{b_4}{E_1}\left[\mathrm{tr}\{\not p_3 \not p_4 \not p_5 \not p_6\} - 2s_{56}(s_{345} - s_{45})\right] P_{34}^{(2)} \\
& + \frac{b_3}{E_3}\left[\mathrm{tr}\{\not p_2 \not p_3 \not p_4 \not p_5\} - 2s_{23}(s_{345} - s_{34})\right] P_{45}^{(2)} \\
& + \frac{b_4}{E_1}\left[\mathrm{tr}\{\not p_3 \not p_4 \not p_5 \not p_6\} - 2s_{56}(s_{345} - s_{45})\right] P_{45}^{(2)} \\
& + 2b_5 P_{56}^{(2)} + \frac{b_4}{E_1}\left[2s_{34}(s_{123} - s_{45}) - \mathrm{tr}\{\not p_3 \not p_4 \not p_5 \not p_6\}\right] P_{56}^{(2)} \\
& + \frac{b_6}{E_3}\left[2s_{12}(s_{234} - s_{61}) - \mathrm{tr}\{\not p_5 \not p_6 \not p_1 \not p_2\}\right] P_{56}^{(2)} \Bigg\} + 5 \text{ zykl. Permutationen.}
\end{aligned} \tag{5.99}$$

Der Term $P^{(1)}$ kann durch Einsetzen der Gleichungen

$$s_{23}b_3 = 1 - s_{234}b_4 - s_{61}b_5, \tag{5.100}$$

$$s_{12}b_6 = 1 - s_{345}b_5 - s_{34}b_4 \text{und} \tag{5.101}$$

$$\mathrm{tr}\{\not p_2 \not p_5\} = 2(s_{34} + s_{61} - s234 - s_{345}) \tag{5.102}$$

sowie durch die Ersetzung der Spur $\mathrm{tr}\{\not p_3 \not p_4 \not p_5 \not p_6\}$ mit (5.83), die den Koeffizienten von $b_4$ zu $-2$ macht, vereinfacht werden:

$$P^{(1)} = \left\{-2b_4 - 2b_5 + \frac{1}{E_3}\left(2C_3^{\mathrm{op}} + 2E_3 b_4 + 2E_3 b_5\right)\right\} P_{34}^{(1)} + 5 \text{ zykl. Perm..} \tag{5.103}$$

Die rechte Seite ergibt jedoch Null, da $C_3^{\mathrm{op}}$ analog zu (5.90) verschwindet.

In $\tilde{P}^{(1)}$ findet man das gleiche Ergebnis nach ähnlicher Rechnung. Man kann analog zu $P^{(1)}$ den Term $2C_4^{\mathrm{op}} - \mathrm{tr}\{\not p_3 \not p_6\}$ extrahieren und durch Einsetzen des entsprechenden Terms für $\mathrm{tr}\{\not p_5 \not p_6 \not p_1 \not p_2\}$ den Koeffizienten von $b_6$ zu $-2$ vereinfachen. Der Rest der Rechnung folgt durch Einsetzen der entsprechenden Gleichungen aus dem Gleichungssystem (5.67) für $s_{23}b_1$ und $s_{34}b_4$.

Als letzter Polterm sollte auch $P^{(2)}$ verschwinden. Wählt man jeweils die Terme aus den Permutationen mit dem Pol $P_{45}^{(2)}$, so heben sich zunächst alle Ausdrücke, die nach der Verschiebung proportional zu $b_3$ und zu $b_5$ sind, weg, und es bleiben ausschließlich Terme proportional zu $b_4$ übrig,

$$\begin{aligned}
P^{(2)} = & \frac{2b_4}{E_1}\left[\mathrm{tr}\{\not p_3 \not p_4 \not p_5 \not p_6\} - s_{34}(s_{123} - s_{45}) - s_{56}(s_{345} - s_{45})\right] + 2b_4 \\
& + 5 \text{ zyklische Permutationen.}
\end{aligned} \tag{5.104}$$

Nach dem Einsetzen der Spur $\mathrm{tr}\{\not p_3 \not p_4 \not p_5 \not p_6\}$ heben sich fast alle Terme weg, und es ergibt sich

$$P^{(2)} = \frac{2b_4}{E1}\left[-E_1\right] + 2b_4 + 5 \text{ zykl. Perm.} = 0. \tag{5.105}$$

Damit wurde explizit gezeigt, dass alle Polterme im Hexagonanteil der Sechsskalaramplitude verschwinden, diese also infrarot-endlich ist. Die bei den Poltermen ausgeführten Kürzungen haben aber auch noch Auswirkungen auf die endlichen Terme. Betrachtet man nämlich $F_1$ und $F_2$ genauer,

$$\begin{aligned} F_1(s_{34}, s_{45}, s_{345}) = & \\ & - \mathrm{Li}_2\left(1 - \frac{s_{34}}{s_{345}}\right) - \mathrm{Li}_2\left(1 - \frac{s_{45}}{s_{345}}\right) - \log\left(\frac{s_{34}}{s_{345}}\right)\log\left(\frac{s_{45}}{s_{345}}\right) + \frac{\pi^2}{6}, \end{aligned} \tag{5.106}$$

$$\begin{aligned} F_2(s_{56}, s_{345}, s_{12}, s_{34}) = & \\ & \mathrm{Li}_2\left(1 - \frac{s_{12}}{s_{345}}\right) + \mathrm{Li}_2\left(1 - \frac{s_{34}}{s_{345}}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{s_{56}}{s_{345}}\right)\log\left(\frac{s_{34}}{s_{345}}\right) \\ & + \frac{1}{2}\log\left(\frac{s_{12}}{s_{345}}\right)\log\left(\frac{s_{56}}{s_{34}}\right), \end{aligned} \tag{5.107}$$

so stellt man im Vergleich mit (5.93) und (5.94) fest, dass die Dilogarithmen

$$\mathrm{Li}_2\left(1 - s_{i,i+1}/s_{i,i+1,i+2}\right)$$

die gleichen Koeffizienten tragen wie die Pole $-P^{(1)}_{i,i+1}$ und ebenso

$$\mathrm{Li}_2\left(1 - s_{i+1,i+2}/s_{i,i+1,i+2}\right)$$

jeweils zusammen mit dem Pol $-\tilde{P}^{(1)}_{i+1,i+2}$ auftreten. Da jedoch die Vorfaktoren der Pole verschwinden, ist die Amplitude auch frei von Dilogarithmen. Als Ausdruck für den Hexagonbeitrag der impulsgeordneten Amplitude verbleibt nun nur noch

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{BBBBBB}_{\text{hex}} = & -\frac{g^6_{\bar{\Psi}\Psi B}\mu^{2(4-d)}}{6\pi^2}\Bigg\{\frac{1}{3}\mathrm{tr}\{\mathbb{1}\}I^d_3(p_{12}, p_{34}, p_{56}) \\ & + \left(\frac{b_3}{E_3}\left[\mathrm{tr}\{\not{p}_2\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\} - 2s_{23}(s_{345} - s_{34})\right] + \frac{b_4}{E_1}\left[\mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\} - 2s_{56}(s_{345} - s_{45})\right]\right) \\ & \times 2\log\left(\frac{s_{34}}{s_{345}}\right)\log\left(\frac{s_{45}}{s_{345}}\right) \\ & + \left(-2b_5 + \frac{b_4}{E_1}\left[\mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\} - 2s_{34}(s_{123} - s_{45})\right] + \frac{b_6}{E_3}\left[\mathrm{tr}\{\not{p}_5\not{p}_6\not{p}_1\not{p}_2\} - 2s_{12}(s_{234} - s_{61})\right]\right) \\ & \times\left\{\log\left(\frac{s_{56}}{s_{345}}\right)\log\left(\frac{s_{34}}{s_{345}}\right) + \log\left(\frac{s_{12}}{s_{345}}\right)\log\left(\frac{s_{56}}{s_{34}}\right)\right\}\Bigg\} \\ & + 5 \text{ zyklische Permutationen}. \end{aligned} \tag{5.108}$$

Der Term $-\pi^2/6$ verschwindet aufgrund zyklischer Symmetrie, denn er trägt den Koeffizienten

$$\left(\frac{b_3}{E_3}\left[\mathrm{tr}\{\not p_2\not p_3\not p_4\not p_5\} - 2s_{23}(s_{345} - s_{34})\right] + \frac{b_4}{E_1}\left[\mathrm{tr}\{\not p_3\not p_4\not p_5\not p_6\} - 2s_{56}(s_{345} - s_{45})\right]\right)$$
$$+ 5 \text{ zyklische Permutationen}$$
$$= \frac{b_3}{E_3}\left(\left[\mathrm{tr}\{\not p_2\not p_3\not p_4\not p_5\} - 2s_{23}(s_{345} - s_{34})\right] + \left[\mathrm{tr}\{\not p_2\not p_3\not p_4\not p_5\}6 - 2s_{45}(s_{234} - s_{34})\right]\right)$$
$$+ 5 \text{ zyklische Permutationen}$$
$$= -2b_3 + 5 \text{ zyklische Permutationen} = -2B = 0. \quad (5.109)$$

### 5.2.4 Sonstige Beiträge

Die Diagramme 5.4(e) und 5.4(f) sind die einzigen beiden, die einen Beitrag zu den Integralen $I_3^d(p_{12}, p_{34}, p_{56})$ und $I_3^d(p_{23}, p_{45}, p_{61})$ liefern können. Die Amplitude des skalaren Dreiecks ist

$$i\Lambda_{\mathrm{tri}_1}^{BBBBBB}(p_1, \ldots, p_6) = (12g_{BBBB}^2\mu^{4-d})^3\frac{\mu^{-(4-d)}i}{16\pi^2}I_3^d(p_{61}, p_{23}, p_{45}), \quad (5.110)$$

und der pseudoskalare Beitrag liefert

$$i\Lambda_{\mathrm{tri}_2}^{BBBBBB}(p_1, \ldots, p_6) = (4g_{BBCC}^2\mu^{4-d})^3\frac{\mu^{-(4-d)}i}{16\pi^2}I_3^d(p_{61}, p_{23}, p_{45}). \quad (5.111)$$

Die symmetrisierte Amplitude ist also

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\mathrm{tri}} &= \frac{12^3g_{BBBB}^6 + 4^3g_{BBCC}^6}{2\cdot 48\cdot 16}\frac{\mu^{2(4-d)}}{\pi^2}\left(I_3^d(p_{61}, p_{23}, p_{45}) + I_3^d(p_{12}, p_{34}, p_{56})\right)\\ &= \frac{27g_{BBBB}^6 + g_{BBCC}^6}{24}\frac{\mu^{2(4-d)}}{\pi^2}\left(I_3^d(p_{61}, p_{23}, p_{45}) + I_3^d(p_{12}, p_{34}, p_{56})\right). \quad (5.112)\end{aligned}$$

Als weitere Klasse von Diagrammen kann man 5.4(c) und 5.4(d) zusammenfassen, da sie sich nur in den Kopplungen unterscheiden. Es ist

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\mathrm{sg}} &= \frac{s_{\mathrm{box}}}{6}(1 + \mathcal{P} + \ldots + \mathcal{P}^5)\left(\Lambda_{\mathrm{sg}_1}^{BBBBBB}(p_1, \ldots, p_6)\right.\\ &\qquad \left.+ \Lambda_{\mathrm{sg}_2}^{BBBBBB}(p_1, \ldots, p_6)\right) \quad (5.113)\\ &= \frac{1}{12\cdot 6}(1 + \mathcal{P} + \ldots + \mathcal{P}^5)\\ &\qquad (12g_{BBBB}^2)\frac{1}{s_{123}}\left[(12g_{BBBB}^2)^2 + (4g_{BBCC}^2)^2\right]\frac{\mu^{2(4-d)}}{16\pi^2}\frac{1}{2}I_2^d(p_{56})\\ &= \frac{1}{12}\left[9g_{BBBB}^6 + g_{BBBB}^2g_{BBCC}^4\right]\frac{\mu^{2(4-d)}}{\pi^2}\\ &\qquad \left(\frac{I_2^d(p_{12})}{s_{345}} + \frac{I_2^d(p_{23})}{s_{123}} + \frac{I_2^d(p_{34})}{s_{234}} + \frac{I_2^d(p_{45})}{s_{345}} + \frac{I_2^d(p_{56})}{s_{123}} + \frac{I_2^d(p_{61})}{s_{234}}\right) \quad (5.114)\end{aligned}$$

Die Countertermgraphen können unter Verwendung der vorangegangenen Kapitel einfach angegeben werden, wobei hier bereits der supersymmetrische Grenzfall angenommen wird, der zur Summation der Terme ohnehin gebildet wird:

$$\Lambda_{\mathrm{ct}_v}^{BBBBBB} = -36\frac{ig^6\mu^{2(4-d)}}{\pi^2}\frac{1}{s_{123}}\Delta \tag{5.115}$$

$$\Lambda_{\mathrm{ct}_p}^{BBBBBB} = -36\frac{ig^6\mu^{2(4-d)}}{\pi^2}\frac{1}{s_{123}}\Delta \tag{5.116}$$

Somit kann man die entsprechenden impulsgeordneten Countertermamplituden angeben:

$$\mathcal{A}_{\mathrm{ct}_v}^{BBBBBB} = -\frac{ig^6\mu^{2(4-d)}}{\pi^2}\frac{1}{6}\left[\frac{1}{s_{123}} + 5\text{ zykl. Permut.}\right]\Delta \tag{5.117}$$

$$\mathcal{A}_{\mathrm{ct}_p}^{BBBBBB} = -\frac{ig^6\mu^{2(4-d)}}{\pi^2}\frac{1}{12}\left[\frac{1}{s_{123}} + 5\text{ zykl. Permut.}\right]\Delta \tag{5.118}$$

Ebenso kann man auf die Berechnung der Zweipunktfunktionen zurückgreifen um die Beiträge $\Lambda_{\mathrm{se}}^{BBBBBB}$, $\Lambda_{\mathrm{tp}_1}^{BBBBBB}$ und $\Lambda_{\mathrm{tp}_2}^{BBBBBB}$ zu berechnen:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\mathrm{se}}^{BBBBBB} &= s_{\mathrm{se}}\frac{1}{3}(1+\mathcal{P}+\mathcal{P}^2)\left[\Lambda_{\mathrm{se}}^{BBBBBB} + \Lambda_{\mathrm{tp}_1}^{BBBBBB} + \Lambda_{\mathrm{tp}_2}^{BBBBBB}\right]\\ &= \frac{1}{12}\frac{g^6\mu^{2(4-d)}}{\pi^2}\left[\frac{1}{s_{123}}I_2^d(s_{123}) + 5\text{ zyklische Permutationen}\right]\end{aligned} \tag{5.119}$$

### 5.2.5 Die Gesamtamplitude

Wie schon bei der Vierpunktamplitude gibt auch bei der Sechspunktamplitude eine Summation der Terme nur im supersymmetrischen Grenzfall die Hoffnung auf Vereinfachungen. Die impulsgeordnete Gesamtamplitude lautet:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}^{BBBBBB}(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6) = \frac{g^6\mu^{2(4-d)}}{\pi^2} \Bigg\{ \\
\left(-\frac{4}{6}+\frac{7}{6}\right) I_3^d(p_{12},p_{34},p_{56}) + \left(-\frac{4}{6}+\frac{7}{6}\right) I_3^d(p_{23},p_{45},p_{61}) \\
-\frac{1}{6}\Bigg[\left(\frac{b_3}{E_3}\left[\mathrm{tr}\{\not{p}_2\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\} - 2s_{23}(s_{345}-s_{34})\right] + \frac{b_4}{E_1}\left[\mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\} - 2s_{56}(s_{345}-s_{45})\right]\right) \\
\times 2\log\left(\frac{s_{34}}{s_{345}}\right)\log\left(\frac{s_{45}}{s_{345}}\right) \\
+\left(-2b_5 + \frac{b_4}{E_1}\left[\mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\} - 2s_{34}(s_{123}-s_{45})\right] + \frac{b_6}{E_3}\left[\mathrm{tr}\{\not{p}_5\not{p}_6\not{p}_1\not{p}_2\} - 2s_{12}(s_{234}-s_{61})\right]\right) \\
\times\left\{\log\left(\frac{s_{56}}{s_{345}}\right)\log\left(\frac{s_{34}}{s_{345}}\right) + \log\left(\frac{s_{12}}{s_{345}}\right)\log\left(\frac{s_{56}}{s_{34}}\right)\right\} \\
+ 5 \text{ zyklische Permutationen}\Bigg] \\
-\frac{1}{6}\left[\frac{1}{s_{123}}\left(2F_1(s_{45},s_{56},s_{123}) + 4I_2^d(s_{45})\right) + 5 \text{ zykl. Perm.}\right] \\
+\frac{5}{6}\left[\frac{1}{s_{123}} I_2^d(s_{12}) + 5 \text{ zyklische Permutationen}\right] \\
-\frac{1}{6}\left[\frac{\Delta}{s_{123}} + 5 \text{ zyklische Permutationen}\right] \\
+\frac{1}{12}\left[\frac{1}{s_{123}} I_2^d(s_{123}) + 5 \text{ zyklische Permutationen}\right] \\
-\frac{1}{12}\left[\frac{\Delta}{s_{123}} + 5 \text{ zyklische Permutationen}\right]\Bigg\} \qquad (5.120)
\end{aligned}
$$

Nach explizitem Ausschreiben der $I_2^d$-Integrale gewinnt die impulsgeordnete Amplitude ihre endgültige Form,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}^{BBBBBB}(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6) = \frac{g^6\mu^{2(4-d)}}{6\pi^2} \Bigg\{ & \; I_3^d(p_{12},p_{34},p_{56}) \\
- \Bigg( \frac{b_3}{E_3}\left[\mathrm{tr}\{\not{p}_2\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\} - 2s_{23}(s_{345}-s_{34})\right] &+ \frac{b_4}{E_1}\left[\mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\} - 2s_{56}(s_{345}-s_{45})\right]\Bigg) \\
&\times 2\log\left(\frac{s_{34}}{s_{345}}\right)\log\left(\frac{s_{45}}{s_{345}}\right) \\
- \Bigg( -2b_5 + \frac{b_4}{E_1}\left[\mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\} - 2s_{34}(s_{123}-s_{45})\right] &+ \frac{b_6}{E_3}\left[\mathrm{tr}\{\not{p}_5\not{p}_6\not{p}_1\not{p}_2\} - 2s_{12}(s_{234}-s_{61})\right]\Bigg) \\
&\times \left\{\log\left(\frac{s_{56}}{s_{345}}\right)\log\left(\frac{s_{34}}{s_{345}}\right) + \log\left(\frac{s_{12}}{s_{345}}\right)\log\left(\frac{s_{56}}{s_{34}}\right)\right\} \\
+ \frac{1}{s_{123}}\Bigg[2\mathrm{Li}_2\left(1-\frac{s_{45}}{s_{123}}\right) &+ 2\mathrm{Li}_2\left(1-\frac{s_{56}}{s_{123}}\right) + 2\log\left(\frac{s_{45}}{s_{123}}\right)\log\left(\frac{s_{56}}{s_{123}}\right) - \frac{\pi^2}{3} \\
&- \ln\left(\frac{-s_{45}-i\delta}{\mu^2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{-s_{123}-i\delta}{\mu^2}\right) + 3\Bigg]\Bigg\} \\
&+ 5 \text{ zyklische Permutationen.}
\end{aligned}
\tag{5.121}
$$

An diesem Ergebnis fällt auf, dass eine explizite Abhängigkeit von der Renormierungsskala bestehen bleibt. Diese stammt jedoch aus 1-Teilchen-reduziblen Beiträgen, nämlich aus den Vertex- und Propagatorkorrekturen. In einem reinen Yukawa-Modell, das keine Skalarselbstkopplung aufweist, besitzt die Sechsskalaramplitude keine solchen reduziblen Beiträge und ist damit frei von expliziten Renormierungsskalenabhängigkeiten. Dies ist ein Ergebnis aus [BGHS01].

Nun folgt die Summation über alle Permutationen. Diese kann hier nicht mehr explizit angegeben werden, da insgesamt 6!-mal, also 720 mal die impulgeordnete Amplitude $\mathcal{A}^{BBBBBB}$ erzeugt würde. Im günstigsten Fall, also wenn man sämtliche verbleibenden Symmetrien ausnutzt, müssen immer noch 120 Terme erzeugt werden. In Kapitel 8.3 ist ein Programm angegeben, das genau die Erzeugung dieser Terme erledigt und für eine Generierung der Gesamtamplitude eingesetzt werden kann.

# 6 Supersymmetrische Ward-Identitäten

## 6.1 Supersymmetrietransformationen

Um die supersymmetrischen Ward-Identitäten für die Amplituden des masselosen Wess-Zumino-Modells herleiten zu können, müssen, ausgehend von den Gleichungen (2.66)–(2.71), noch zwei Schritte bewältigt werden, um die dort angegebenen Transformationen benutzen zu können. Zum einen müssen die Gleichungen in den Feldern $B$, $C$ und $\mathbf{\Psi}$ dargestellt werden, und dies bedeutet des weiteren, dass das Hilfsfeld $F$ aus den Gleichungen eliminiert werden muss.

Zunächst suche ich die Darstellung durch Majorana-Spinoren. Dazu verwende ich

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Phi(x) + \Phi^*(x)\right), & (6.1)\\ C(x) &= \frac{i}{\sqrt{2}}\left(-\Phi(x) + \Phi^*(x)\right) \quad \text{und} & (6.2)\\ \mathbf{\Psi}(x) &= \begin{pmatrix} \Psi_\alpha(x) \\ \bar{\Psi}^{\dot{\alpha}}(x) \end{pmatrix}. & (6.3) \end{aligned}$$

Außerdem ist es für die folgende Rechnung einfacher, auch $F$ in eine explizit komplexe Darstellung zu bringen,

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathcal{F} + i\mathcal{G}\right). \tag{6.4}$$

Dann sind die Transformationen der einzelnen Felder, zunächst noch mit den Hilfsfeldern

$$\begin{aligned} \delta_\Xi B(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Xi}\mathbf{\Psi}(x), & (6.5)\\ \delta_\Xi C(x) &= \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\Xi}\gamma_5\mathbf{\Psi}(x), & (6.6)\\ \delta_\Xi \mathcal{F}(x) &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\Xi}\gamma_5\partial\!\!\!/\mathbf{\Psi}(x), & (6.7)\\ \delta_\Xi \mathcal{G}(x) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Xi}\partial\!\!\!/\mathbf{\Psi}(x), & (6.8)\\ \delta_\Xi \mathbf{\Psi}(x) &= \sqrt{2}\left[\left(\mathcal{F}(x) - i\gamma_5\mathcal{G}(x)\right) + i\partial\!\!\!/\left(B(x) + i\gamma_5 C(x)\right)\right]\Xi. & (6.9) \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen für die Hilfsfelder wurden in (2.79) und (2.80) hergeleitet, und können ebenfalls für die reellen Hilfsfelder $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ angegeben werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= -\sqrt{2}g\left(B^2 - C^2\right) & (6.10)\\ \mathcal{G} &= \sqrt{2}g\left(2BC\right) & (6.11) \end{aligned}$$

Setzt man die Bewegungsgleichungen in die Transformation ein, so erhält man die gewünschte, von Hilfsfeldern freie Form

$$\delta_\Xi \mathbf{\Psi}(x) = 2\left[+i\partial\!\!\!/ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(B + i\gamma_5 C\right) - g\left(B^2 - C^2 + 2i\gamma_5 BC\right)\right]\Xi \tag{6.12}$$

Die Anwendung der Bewegungsgleichungen hat allerdings eine Einschränkung zur Folge. Die supersymmetrischen Ward-Identitäten können so nur für Teilchen auf der Massenschale angewandt werden, da ja bereits für einen Teil der Hilfsfelder die Gültigkeit der Bewegungsgleichung vorausgesetzt wurde. Dies stellt für den hier behandelten Fall jedoch kein grundsätzliches Problem dar, da ohnehin nur Amplituden mit allen externen Teilchen auf der Massenschale behandelt werden.

Die Supersymmetrietransformation für das Fermionfeld kann noch weiter vereinfacht werden, da die supersymmetrischen Ward-Identitäten nur für Amplituden hergeleitet werden sollen. Die Lehmann-Symanzik-Zimmermann-Bedingung [Kug97] besagt, dass die ein- und auslaufenden Felder einer Amplitude asymptotische Felder sind und den freien Bewegungsgleichungen genügen. Für die Supersymmetrietransformation bedeutet dies, dass keine Wechselwirkungen mit anderen Feldern berücksichtigt werden [Reu02]; die nicht-linearen Terme in (6.12) fallen also weg.

Außerdem muss berücksichtigt werden, dass zur Ableitung der Feynman-Regeln die Ersetzung

$$\mathbf{\Psi}(x) \to \sqrt{2}\mathbf{\Psi}(x) \tag{6.13}$$

durchgeführt wurde. So ergibt sich als endgültige Form der supersymmetrischen Transformationen

$$\begin{aligned} \delta_\Xi B(x) &= \frac{1}{2}\bar{\Xi}\mathbf{\Psi}(x), && (6.14)\\ \delta_\Xi C(x) &= \frac{1}{2}\bar{\Xi} i\gamma_5 \mathbf{\Psi}(x) \quad \text{und} && (6.15)\\ \delta_\Xi \mathbf{\Psi}(x) &= 2i\partial\!\!\!/\left(B + i\gamma_5 C\right)\Xi. && (6.16) \end{aligned}$$

## 6.2 Herleitung der Ward-Identitäten

Mit den Vorbereitungen aus dem vorigen Abschnitt können nun die supersymmetrischen Ward-Identitäten hergeleitet werden. Als Ausgangspunkt hierfür wird ausgenutzt, dass das Vakuum invariant unter Supersymmetrietransformationen ist,

$$Q_\alpha \left|0\right\rangle = \overline{Q}^{\dot\alpha}\left|0\right\rangle = 0. \tag{6.17}$$

Damit lässt sich aber auch für jeden beliebigen Feldoperator $\hat{O}$ der Vakuumerwartungswert des Kommutators mit $\mathbf{Q}$ berechnen, welcher wegen (6.17)

$$\left\langle 0\right|\left[\mathbf{Q},\hat{O}\right]\left|0\right\rangle = \left\langle 0\right|\mathbf{Q}\hat{O}\left|0\right\rangle - \left\langle 0\right|\hat{O}\mathbf{Q}\left|0\right\rangle = 0 \tag{6.18}$$

verschwindet. Kennt man den Kommutator außerdem explizit, wie für die Feldoperatoren

$$\left[i\bar{\Xi}\mathbf{Q}, B(x)\right] = \delta_{\Xi} B(x) \tag{6.19}$$

und analog für $C(x)$ und $\mathbf{\Psi}(x)$, so kann man beide Ergebnisse vergleichen und so neue Relationen zwischen verschiedenen Vakuumerwartungswerten gewinnen. Insbesondere kann dieses Vorgehen auf Operatoren der Form[1] $\mathbf{T}\hat{O}_1(x_1)\hat{O}_2(x_2)\cdots\hat{O}_n(x_n)$ führen auf die gewünschten Relationen, mit Hilfe derer Amplituden unterschiedlicher äußerer Teilchen miteinander verknüpft werden können. Dazu nutzt man unter anderem die Identität für Kommutatoren von Produkten aus, die auch allgemein ohne Kenntnis der Operatoren gilt:

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{Q}, \hat{O}_1\hat{O}_2\cdots\hat{O}_n\right] = \\ \left[\mathbf{Q}, \hat{O}_1\right]\hat{O}_2\cdots\hat{O}_n + \hat{O}_1\left[\mathbf{Q}, \hat{O}_2\right]\hat{O}_3\cdots\hat{O}_n + \ldots + \hat{O}_1\cdots\hat{O}_{n-1}\left[\mathbf{Q}, \hat{O}_n\right]\end{aligned} \tag{6.20}$$

Für eine beliebige Amplitude, das heißt durch Einsetzen beliebiger Feldoperatoren $\hat{O}_i(x_i) \in \{B(x_i), C(x_i), \Psi(x_i)\}$ kann man nun die Identitäten zusammenfassen:

$$\begin{aligned}0 = \langle 0|\left[i\Xi\mathbf{Q}, \mathbf{T}\hat{O}_1(x_1)\hat{O}_2(x_2)\cdots\hat{O}_n(x_n)\right]|0\rangle = \\ \langle 0|\,\mathbf{T}\delta_{\Xi}\hat{O}_1(x_1)\hat{O}_2(x_2)\cdots\hat{O}_n(x_n)\,|0\rangle + \langle 0|\,\mathbf{T}\hat{O}_1(x_1)\delta_{\Xi}\hat{O}_2(x_2)\cdots\hat{O}_n(x_n)\,|0\rangle + \ldots \\ + \langle 0|\,\mathbf{T}\hat{O}_1(x_1)\hat{O}_2(x_2)\cdots\delta_{\Xi}\hat{O}_n(x_n)\,|0\rangle\end{aligned} \tag{6.21}$$

Zu bemerken ist noch, dass in der Regel die Amplitude $\langle 0|T\hat{O}_1(x_1)\cdots\hat{O}_n(x_n)|0\rangle$ unphysikalisch gewählt wird, damit der Operator $\delta_{\Xi}$ physikalische Amplituden generiert.

## 6.3 Anwendung auf die Vierteilchenamplituden

Durch explizite Rechnung wurden bereits die Einschleifenkorrekturen der Amplituden $\Lambda^{BBBB}$, $\Lambda^{CCCC}$ und $\Lambda^{BBCC}$ gewonnen. Diese Ergebnisse sollen nun verwendet werden um durch die supersymmetrischen Ward-Identitäten auch fermionische Amplituden zu generieren.

Die Amplitude $\Lambda^{BB\mathbf{\Psi}\bar{\mathbf{\Psi}}}(p_1, p_2; p_3, p_4)$ erhält man durch den Ansatz

$$\begin{aligned}0 = \langle 0|\left[i\bar{\Xi}\mathbf{Q}, TB(x_1)B(x_2)B(x_3)\bar{\Theta}\mathbf{\Psi}(x_4)\right]|0\rangle = \\ \langle 0|\,\mathbf{T}\left(\frac{1}{2}\bar{\Xi}\mathbf{\Psi}(x_1)\right)B(x_2)B(x_3)\bar{\Theta}\mathbf{\Psi}(x_4)\,|0\rangle \\ + \langle 0|\,\mathbf{T}B(x_1)\left(\frac{1}{2}\bar{\Xi}\mathbf{\Psi}(x_2)\right)B(x_3)\bar{\Theta}\mathbf{\Psi}(x_4)\,|0\rangle \\ + \langle 0|\,\mathbf{T}B(x_1)B(x_2)\left(\frac{1}{2}\bar{\Xi}\mathbf{\Psi}(x_3)\right)\bar{\Theta}\mathbf{\Psi}(x_4)\,|0\rangle\, i \\ + \langle 0|\,\mathbf{T}B(x_1)B(x_2)B(x_3)\bar{\Theta}\left(2i\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x_4^{\mu}}\left[B(x_4) + i\gamma_5 C(x_4)\right]\right)\Xi\,|0\rangle\,.\end{aligned} \tag{6.22}$$

[1] $\mathbf{T}$ ist der Zeitordnungsoperator

Der Term mit dem Pseudoskalar ist Null, da hierzu nur Diagramme mit einer Fermionsschleife beitragen können. Diese verschwinden jedoch, denn betrachtet man ein solches Diagramm, so ist dies proportional zum Integral

$$\Lambda_{\text{box}}^{BBBC}(p_1,p_2,p_3;p_4) \propto \left\langle \frac{\operatorname{tr}\{\not{q}_1\not{q}_2\not{q}_3\gamma_5\not{q}_4\}}{q_1^2q_2^2q_3^2q_4^2} \right\rangle_d \propto \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} r_1^\mu r_2^\nu r_3^\rho I_4^{d,\sigma}(r_1,r_2,r_3,r_4), \qquad (6.23)$$

denn alle höheren Tensorintegrale sind symmetrisch unter Vertauschung zweier Indizes, so dass sie unter dem asymmetrischen Tensor verschwinden. Außerdem wurde verwendet, dass $r_4 = 0$ ist. Da nun die Vektorstruktur von $I_4^{d,\sigma}$ nur von den externen Impulsen getragen werden kann, ergibt sich der folgende Ansatz für das Integral

$$I_4^{d,\sigma}(r_1,r_2,r_3,r_4) = r_1^\sigma \cdot C_1 + r_2^\sigma \cdot C_2 + r_3^\sigma \cdot C_3, \qquad (6.24)$$

wobei die $C_i = C_i(r_1,r_2,r_3)$ skalare Funktionen sind, die hier nicht bestimmt werden müssen, da man bereits an der Vektorstruktur des Integrals erkennt, dass die Kontraktion $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} r_1^\mu r_2^\nu r_3^\rho r_i^\sigma, i = 1,2,3$ verschwinden muss, da stets zwei gleiche Vektoren unter dem asymmetrischen Tensor auftreten.

Die Transformation lautet also zunächst:

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\, \mathbf{T}B(x_2)B(x_3)\bar{\Xi}\mathbf{\Psi}(x_1)\bar{\Theta}\mathbf{\Psi}(x_4)\,|0\rangle \\
&\quad + \langle 0|\, \mathbf{T}B(x_1)B(x_3)\bar{\Xi}\mathbf{\Psi}(x_2)\bar{\Theta}\mathbf{\Psi}(x_4)\,|0\rangle + \langle 0|\, \mathbf{T}B(x_1)B(x_2)\bar{\Xi}\mathbf{\Psi}(x_3)\bar{\Theta}\mathbf{\Psi}(x_4)\,|0\rangle \\
&\qquad = -4\,\langle 0|\, \mathbf{T}B(x_1)B(x_2)B(x_3)\frac{i\partial}{\partial x_4^\mu}B(x_4)\,|0\rangle\,\bar{\Theta}\gamma^\mu\Xi. \qquad (6.25)
\end{aligned}$$

Nach Fourier-Transformation in den Impulsraum und Anwenden der Relationen für Majorana-Spinoren $\bar{\Theta}\gamma^\mu\Xi = -\bar{\Xi}\gamma^\mu\Theta$ und $\bar{\Theta}\Psi = \bar{\Psi}\Theta$ kann man die Identität (6.25) schreiben als

$$\begin{aligned}
&4\not{p}_4\Lambda^{BBBB}(p_1,p_2,p_3,p_4) = \\
&\quad \Lambda^{BB\mathbf{\Psi}\bar{\mathbf{\Psi}}}(p_1,p_2;p_3,p_4) + \Lambda^{BB\mathbf{\Psi}\bar{\mathbf{\Psi}}}(p_1,p_3;p_2,p_4) + \Lambda^{BB\mathbf{\Psi}\bar{\mathbf{\Psi}}}(p_2,p_3;p_1,p_4). \qquad (6.26)
\end{aligned}$$

Um die Relation nach der gesuchten Amplitude $\Lambda^{BB\mathbf{\Psi}\bar{\mathbf{\Psi}}}$ auflösen zu können wird ein Ansatz für diese Amplitude benötigt. Die Spinorstruktur der Amplitude kann nur von $\mathbb{1}$, $\not{p}_1$, $\not{p}_2$, $\not{p}_3$ und $\not{p}_4$ getragen werden. Aufgrund der Impulserhaltung kann ein Impuls, hier wird $\not{p}_1$ gewählt, stets durch die anderen drei ausgedrückt werden. Außerdem muss die Amplitude antisymmetrisch unter Vertauschung der Fermionimpulse sein; also kann die Amplitude nicht von den Impulsen $\not{p}_3$ und $\not{p}_4$ einzeln abhängen, sondern nur von deren Differenz. Der Ansatz lautet nun

$$\Lambda^{BB\mathbf{\Psi}\bar{\mathbf{\Psi}}}(p_1,p_2;p_3,p_4) = C_0\mathbb{1} + C_2\not{p}_2 + C_{34}(\not{p}_4 - \not{p}_3). \qquad (6.27)$$

Setzt man den Ansatz (6.27) in die Relation (6.26) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
4\not{p}_4\Lambda^{BBBB}(p_1,p_2,p_3,p_4) &= 3C_0\mathbb{1} + C_2(\not{p}_2 + 2\not{p}_3) + C_{34}(3\not{p}_4 - \not{p}_1 - \not{p}_2 - \not{p}_3) \\
&= 3C_0\mathbb{1} + C_2\not{p}_2 + 2C_2\not{p}_3 + 4C_{34}\not{p}_4. \qquad (6.28)
\end{aligned}$$

Vergleicht man die rechte und die linke Seite der Gleichung, so erhält man

$$C_{34} = \Lambda^{BBBB}(p_1, p_2, p_3, p_4), \quad C_0 = C_2 = 0 \tag{6.29}$$

und hat somit die gewünschte Amplitude vollständig bestimmt,

$$\Lambda^{BB\boldsymbol{\Psi}\bar{\boldsymbol{\Psi}}}(p_1, p_2; p_3, p_4) = (\not{p}_4 - \not{p}_3)\Lambda^{BBBB}(p_1, p_2, p_3, p_4). \tag{6.30}$$

Die analoge Rechnung ausgehend vom Ansatz

$$0 = \langle 0| \left[ i\bar{\Xi}\mathbf{Q}, \mathbf{T}CCC\bar{\Theta}\boldsymbol{\Psi} \right] |0\rangle \tag{6.31}$$

liefert die Relation

$$\Lambda^{CC\boldsymbol{\Psi}\bar{\boldsymbol{\Psi}}}(p_1, p_2; p_3, p_4) = (\not{p}_4 - \not{p}_3)\Lambda^{CCCC}(p_1, p_2, p_3, p_4). \tag{6.32}$$

Die letzte verbleibende Amplitude mit zwei Fermionen ist $\Lambda^{BC\boldsymbol{\Psi}\bar{\boldsymbol{\Psi}}}$. Diese Amplitude gewinnt man aus

$$0 = \langle 0| \left[ i\bar{\Xi}\mathbf{Q}, \mathbf{T}BBC\bar{\Theta}\boldsymbol{\Psi} \right] |0\rangle , \tag{6.33}$$

$$\begin{aligned} \Lambda^{BC\boldsymbol{\Psi}\bar{\boldsymbol{\Psi}}}(p_1, p_2; p_3, p_4) = -i\gamma_5 \Bigg\{ & \not{p}_1 \Lambda^{BBCC}(p_1, p_2, p_3, p_4) \\ & + (\not{p}_1 - \not{p}_2)\frac{1}{2}\Lambda^{BBBB}(p_1, p_2, p_3, p_4) \\ + (\not{p}_4 - \not{p}_3) \Bigg( & \Lambda^{BBCC}(p_1, p_2, p_3, p_4) + \frac{1}{2}\Lambda^{BBBB}(p_1, p_2, p_3, p_4) \Bigg) \Bigg\} . \end{aligned} \tag{6.34}$$

Dieser Formalismus ist natürlich keineswegs auf Vierteilchenamplituden beschränkt, jedoch geht eine Diskussion der Sechsteilchenamplituden über den Rahmen meiner Arbeit hinaus, da für eine vollständige Behandlung die explizite Berechnung weiterer Amplituden nötig wäre, die nicht nur skalare, sondern auch externe Pseudoskalare enthalten.

Eine ausführliche Behandlung der SWI findet man in [Reu02], wo auch ein weitaus allgemeinerer Formalismus entwickelt wird, der sowohl für Teilchen geeignet ist, die nicht auf der Massenschale liegen, als auch auf Theorien spontan gebrochener Supersymmetrie anwendbar ist.

# 7 Ergebnisse und Ausblick

Die Suche nach dem Higgs-Boson und nach Physik jenseits des Standardmodells wird eines der Hauptanliegen des LHC-Experimentes sein. Bei der Auswertung der Beschleunigerdaten werden Vielteilchenamplituden eine wichtige Rolle spielen. Diese müssen in einer möglichst kompakten Form vorliegen um bei der Datenanalyse eine möglichst hohe numerische Stabilität zu gewährleisten.

In dieser Arbeit sollte untersucht werden, inwieweit die Supersymmetrie und insbesondere das Nicht-Renormierungs-Theorem Vereinfachungen bei der Berechnung von Vielteilchenamplituden herbeiführt. Da in [BGHS01] die Sechsskalaramplitude des Yukawa-Modells bereits in einer sehr kompakten Form dargestellt werden konnte, gab das Nicht-Renormierungs-Theorem Anlass zur Hoffnung, im Wess-Zumino-Modell, der supersymmetrischen Erweiterung des Yukawa-Modells, weitere algebraische Kürzungen zu erzielen.

Durch die Herleitung der Supersymmetriealgebra, der Wirkung der Supersymmetrietransformationen auf die Felder und durch die Bestimmung der Lagrange-Dichte des Wess-Zumino-Modells wurden die Grundzüge der Supersymmetrie gezeigt.

Die zur Berechnung von Amplituden auf Einschleifenniveau benötigten Rechentechniken wurden im Kapitel 3 eingeführt, nämlich die Berechnung von Impulsraumintegralen in dimensionaler Regularisierung, die Vereinfachung von Tensorintegralen sowie die Reduktion von skalaren Integralen.

Bei der Berechnung der Renormierungskonstanten wurde deutlich, dass durch das Verschwinden quadratischer Divergenzen in supersymmetrischen Theorien und in diesem Fall die Vereinheitlichung der Kopplungskonstanten die Ergebnisse wesentlich einfacher und kompakter sind, als in vergleichbaren Theorien ohne Supersymmetrie. Ein Beweis für das Nicht-Renormierungs-Theorem von Seiberg [Sei94] wurde gegeben, und die Vorhersagen des Theorems wurden durch explizite Rechnung bestätigt, da gezeigt werden konnte, dass alle Renormierungskonstanten durch eine gemeinsame Konstante $Z$ ausgedrückt werden konnten, welche aus der Wellenfunktionsrenormierung des Superfeldes $\mathbf{\Phi}$ stammt.

Die Vier- und Sechsskalaramplitude wurden berechnet und mit Hilfe des Computeralgebrasystems `FORM` verifiziert. Bei dieser Rechnung kam der Reduktionsalgorithmus für skalare Integrale zum Einsatz, der es ermöglicht, infrarote Pole zu separieren, und so konnte schließlich gezeigt werden, dass alle hier berechneten Amplituden frei von IR-Polen sind. Dieses Ergebnis wurde für die Vierskalaramplitude durch ‚Power Counting' bestätigt. Die Berechnung der Sechsskalaramplitude war der Kernpunkt dieser Arbeit. Den größten Anteil der Rechnung nimmt dabei der Hexagonbeitrag ein, bei dessen

Vereinfachung die bekannten Ergebnisse [BGHS01] bestätigt werden konnten. Daneben waren zwei Triangeldiagramme und mehrere reduzible Graphen zu berechnen. Es konnte gezeigt werden, dass alle Beiträge frei von IR-Divergenzen sind. Neu im Gegensatz zum Yukawa-Modell ist allerdings eine explizite Abhängigkeit von der Renormierungsskala $\mu$, die durch die reduziblen Beiträge in der Sechsteilchenamplitude induziert wird.

Die explizite Berechnung der Renormierungskonstanten und der Vier- und Sechsteilchenamplituden zeigt, dass das Ergebnis des Nicht-Renormierungs-Theorem, das für Supergraphen hergeleitet wurde, bei den Amplituden der Komponentenfelder nicht zu entscheidenden Vereinfachungen führt: Die Anzahl von Basisintegralen ist die gleiche wie im Yukawa-Modell und es werden zusätzliche Strukturen durch 1-Teilchen-reduzible Beiträge erzeugt. Der Vierskalarvertex, zum Beispiel, *wird* renormiert und zeigt eine Abhängigkeit von der Renormierungsskala $\mu$, und obwohl die Hexagonamplitude im Yukawa-Modell frei von Divergenzen ist, wird im WZM durch reduzible Beiträge diese $\mu$-Abhängigkeit auch in der Sechsteilchenamplitude induziert. Das Nicht-Renormierungs-Theorem trägt nicht zu weiteren Vereinfachungen der Sechsskalaramplitude bei, da es keinerlei vollständige Kürzungen induziert.

Der Einsatz von Computeralgebra diente in dieser Arbeit in erster Linie zum Erlernen der Techniken und wurde in erster Linie zur Überprüfung der von Hand berechneten Ergebnisse verwendet. Da die `FORM`-Routinen für die Berechnung der Amplituden in der Summe sehr umfangreich wurden, habe ich meinen Einsatz von Computeralgebra nur anhand von einigen Beispielen demonstriert, die wesentliche und nicht-triviale Aspekte meines Einsatzes von `FORM` repräsentieren.

Zuletzt wurde gezeigt, das durch supersymmetrische Ward-Identitäten ein großer Teil der Berechnung von Amplituden auf bereits bekannte Ergebnisse zurückgeführt werden kann. Hier wurde ein einfacher Zugang gewählt, der für die gewünschten Ergebnisse ausreichend ist, obwohl eine Herleitung der SWI mit Hilfe des supersymmetrischen Stromes, wie sie z. B. in [Reu02] durchgeführt wurde, ein noch mächtigeres Werkzeug zur Verfügung stellen würde.

Eine Berechnung der Sechsskalaramplitude im massiven Modell wäre ebenfalls denkbar. Allerdings erschweren zwei Aspekte die Berechnung der massiven Amplituden. Erstens kommen im massiven Modell noch Dreierkopplungen zwischen Skalaren und Pseudoskalaren sowie Dreiskalarselbstkopplungen hinzu, die die Anzahl der zu berechnenden Diagramme enorm steigern. Sind für die Berechnung der Sechsskalaramplitude im masselosen Modell 250 Diagramme auszuwerten, so sind es im massiven Fall bereits 11775 Diagramme. Zweitens werden auch die Reduktionsformeln für die Skalarintegrale komplizierter, da nicht wie im masselosen Fall für alle externen Teilchen $s_i = 0$ gilt, sondern die Massenschalenbedingung nun $s_i = m^2 \neq 0$ lautet. Dadurch wird die polynomiale Struktur der Koeffizienten komplizierter und algebraische Kürzungen sind weniger wahrscheinlich, oder zumindest nicht mehr leicht zu erkennen.

Als weiterführende Arbeit sind die noch ausstehenden SWI für den Sechsteilchenfall sowie die Renormierung des massiven WZM geplant. Eine Überprüfung der Ergebnisse aus den SWI durch eine explizite Berechnung der gewonnenen Amplituden wäre wünschenswert. Diese Rechnung ist dann ein mögliches Einsatz- und Testfeld für das `FORM`-Programm zur Berechnung der Tensorkoeffizienten, das ich in Abschnitt 8.3.4 angegeben habe.

Ebenfalls wäre eine vergleichende Berechnung der Sechsteilchenamplituden mit Hilfe der Methode der MHV-Amplituden [Wit04] ein lohnendes Forschungsprojekt, da inzwischen auch große Fortschritte dieser Technik auf Schleifen-Niveau erzielt wurden [BDDK95].

Neben diesen konkreten Zielen für weiterführende Arbeiten konnten hier auch generische Methoden für die Phänomenologie in der Teilchenphysik erlernt werden. Algebraische Vereinfachungen von Amplituden und die Entwicklung systematischer Algorithmen zur Automatisierung der Berechnung von Amplituden spielen eine wichtige Rolle für Präzisionsrechnungen im Standardmodell, welche experimentelle Tests von erweiterten Theorien häufig erst möglich machen. Gleichzeitig ist es für Teilchenphänomenologie auch unabdingbar, den Umgang mit einem Computeralgebrasystem zu erlernen, mit dem schließlich diese Algorithmen implementiert werden sollen. Die Wahl fiel hierbei auf das Programm `FORM` von J. A. M. Vermaseren, da dieses System speziell für die Bedürfnisse der Hochenergiephysik entwickelt wurde. Es zeichnet sich durch einen hohen Datendurchsatz aus, was aufgrund der großen Zahl von Diagrammen und der Größe der entstehenden Ausdrücke bei QCD-Berechnungen von besonderer Bedeutung ist.

Die Signifikanz von Präzisionsrechnungen zeigt sich besonders am Beispiel des LHC. An diesem internationalen Großexperiment werden sich neben der Supersymmetrie viele weitere mögliche Erweiterungen des Standardmodells messen lassen müssen. Um den Parameterbereich dieser Theorien durch das Experiment einzuschränken oder einige Theorien völlig ausschließen zu können, wird es nötig sein, die Vorhersagen des Standardmodells so genau zu kennen, dass Abweichungen davon eindeutig identifiziert werden können. Hier sind neben höheren Schleifenordnungen auch Vielteilchenprozesse von gesteigerter Bedeutung. Die in dieser Arbeit benutzten und entwickelten Methoden sind ein wichtiger Baustein für derartige Rechnungen.

# 8 Anhang

## 8.1 Konventionen

Der verwendete metrische Tensor ist

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{8.1}$$

### 8.1.1 Darstellung der Pauli- und Dirac-Matrizen

Für die Dirac-Matrizen $\gamma^\mu$ und $\gamma_5$ und die Pauli-Matrizen $\sigma^\mu$ wurde folgende Darstellung gewählt.

$$\begin{aligned}
\sigma^0 &= \bar{\sigma}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} && (8.2)\\
\sigma^1 &= -\bar{\sigma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} && (8.3)\\
\sigma^2 &= -\bar{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} && (8.4)\\
\sigma^3 &= -\bar{\sigma}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} && (8.5)\\
\gamma^\mu &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} && (8.6)\\
\gamma_\mu &= g_{\mu\nu}\gamma^\nu && (8.7)\\
\gamma^5 &= \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} && (8.8)
\end{aligned}$$

Außerdem werden die Matrizen

$$\Sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right] \tag{8.9}$$

verwendet.

### 8.1.2 Symmetrische Gruppen

Zur Berechnung der Symmetriefaktoren von Diagrammen werden deren Symmetriegruppen betrachtet, also alle Permutationen der äußeren Beine, die das Diagramm invariant lassen. Für diesen Zweck werden die folgenden gruppentheoretischen Schreibweisen verwendet. Die symmetrischen Gruppen $\mathcal{S}_n$ bestehen aus den bijektiven Abbildungen einer $n$-elementigen Menge, z. B. $M_n = \{1, 2, 3, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$, in sich selbst, den sogenannten Permutationen. Die Gruppenverknüpfung ist dabei die Hintereinanderausführung zweier Bijektionen,

$$(g_1 g_2)(m) = g_1(g_2(m)), \quad g_1, g_2 \in \mathcal{S}_n, m \in M_n, \tag{8.10}$$

die Inversion die Bildung der Umkehrabbildung.

Eine mögliche Darstellung der Elemente von $\mathcal{S}_n$ ist eine zweizeilige Matrixschreibweise, wobei die erste Zeile alle Urbildelemente enthält, die zweite die Bildelemente jeweils in der gleichen Spalte des zugehörigen Urbildelementes. Das neutrale Element der $\mathcal{S}_6$ besitzt dann die Darstellung

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \tag{8.11}$$

Eine Abbildung die genau 1 und 4 miteinander vertauscht, alle anderen Elemente fest lässt hat die Form

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}. \tag{8.12}$$

Eine kürzere und in vielen Fällen praktischere Notation ist die Schreibweise der Zykel. Ein Zykel ist eine Permutation, die eine Teilmenge der Elemente von $M_n$ untereinander vertauscht. Die zu vertauschenden Elemente werden in runden Klammern notiert, in der Reihenfolge, in der sie ausgetauscht werden. Das Zykel (123) steht für die Abbildung $\{1 \to 2, 2 \to 3, 3 \to 1\}$, wobei alle anderen Elemente der Menge fest bleiben. Es lässt sich zeigen, dass jede Permutation als Verknüpfung von Zykeln geschrieben werden kann. So ist zum Beispiel $e = (1) = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$ und $g = (14) = (14)(2)(3)(5)(6)$. Die Multiplikation mit zusätzlichen neutralen Elementen, also mit einstelligen Zykeln, kann zur Verdeutlichung dienen, über welcher Menge die Elemente operieren.

Endliche Gruppen können stets durch ein Erzeugendensystem angegeben werden, das heißt, eine Menge von Gruppenelemente, die durch Multiplikation und Inversion die ganze Gruppe bilden. So kann zum Beispiel die Gruppe

$$\mathcal{S}_3 = \{(1), (12), (23), (13), (123), (132)\}$$

bereits durch die Elemente (12) und (123) erzeugt werden, denn

$$\begin{aligned} (1) &= (12)(12), \\ (23) &= (123)(12), \\ (13) &= (12)(123) \quad \text{und} \\ (132) &= (123)(123). \end{aligned}$$

Man schreibt dann mit spitzen Klammern $\mathcal{S}_3 = \langle (12), (123) \rangle$. Dieses einfache Beispiel zeigt bereits, dass die symmetrischen Gruppen im Allgemeinen nicht kommutativ sind.

Eine weitere Schreibweise ist die der Länge $|G|$ einer Gruppe $G$, also die Anzahl ihrer Elemente. Die Länge der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_n$ ist bekanntlich

$$|\mathcal{S}_n| = n! \tag{8.13}$$

und kann durch einen einfachen Induktionsbeweis gewonnen werden. Der Satz von Lagrange [Lü93] besagt, dass Die Länge einer Untergruppe stets die Länge der Gruppe teilt. Somit garantiert dieser Satz, dass für den Symmetriefaktor $s$ gilt, dass $s^{-1} \in \mathbb{N}$.

## 8.2 Wichtige Formeln und Identitäten

### 8.2.1 Identitäten für Dirac-Matrizen

Folgende Relationen sind einfach nachzurechnen, finden sich jedoch auch z. B. in [PS95].

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\{\gamma^5\} &= 0 && (8.14)\\
\mathrm{tr}\{\gamma^5\gamma^\mu\} &= 0 && (8.15)\\
\mathrm{tr}\{\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\} &= 0 && (8.16)\\
\mathrm{tr}\{\gamma^\mu\gamma^\nu\} &= 4g_{\mu\nu} && (8.17)\\
(\mathbb{1} \pm \gamma^5)(\mathbb{1} \pm \gamma^5) &= 2(\mathbb{1} \pm \gamma_5) && (8.18)\\
(\mathbb{1} \pm \gamma^5)(\mathbb{1} \mp \gamma^5) &= 0 && (8.19)\\
& && (8.20)
\end{aligned}$$

### 8.2.2 Identitäten für Weyl-Spinoren

Die Herleitung der Identitäten findet man z. B. in [MKW87].

$$\begin{aligned}
(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\theta\sigma^\nu\bar{\theta}) &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta}) && (8.21)\\
(\theta\psi)(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) &= -\frac{1}{2}(\theta\theta)(\psi\sigma^\mu\bar{\theta}) && (8.22)\\
(\bar{\theta}\bar{\psi})(\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\theta}) &= -\frac{1}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})(\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\psi}) && (8.23)\\
(\theta\psi)(\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}) &= +\frac{1}{2}(\theta\theta)(\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}) && (8.24)\\
(\theta\psi)(\theta\chi) &= -\frac{1}{2}(\theta\theta)(\psi\chi) && (8.25)\\
(\bar{\theta}\bar{\psi})(\bar{\theta}\bar{\chi}) &= -\frac{1}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})(\bar{\psi}\bar{\chi}) && (8.26)
\end{aligned}$$

### 8.2.3 Vollständige Reduktion von skalaren Integralen

Es zeigt sich in der Reduktion der Hexagon- und Boxamplituden, dass die Polstruktur der Amplituden deutlicher zum Ausdruck kommt, wenn man die skalaren Boxintegrale nicht in vier- und sechs-dimensionale Integrale zerlegt, sondern vollständing durch elementare Funktionen ausdrückt. Die Reduktionen sind in [BGHS01] und [BDK94] angegeben[1] und wurden hier für eine Sechsteilchenkinematik übernommen:

$$\begin{aligned} b_4 I_5^d(p_3,p_4,p_5,p_6,p_{12}) \\ &= b_{4;1} I_4^d(p_4,p_5,p_6,p_{123}) + b_{4;2} I_4^d(p_5,p_6,p_{12},p_{34}) + b_{4;3} I_4^d(p_3,p_{45},p_6,p_{12}) \\ &\quad + b_{4;4} I_4^d(p_3,p_4,p_{56},p_{12}) + b_{4;5} I_4^d(p_3,p_4,p_5,p_{612}). \end{aligned} \tag{8.27}$$

Die Koeffizienten sind hier mit den im Hexagonbeitrag der Sechsskalaramplitude auftauchenden Faktoren angegeben,

$$s_{34}s_{45}s_{56}b_{4;1} = b_4 \frac{s_{45}s_{56}}{2E_1}\left[2s_{34}(s_{123}-s_{45}) - \mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\}\right], \tag{8.28}$$

$$s_{34}s_{45}s_{56}b_{4;2} = b_4 \frac{s_{56}}{2E_1}\left[s_{345}\mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\} + 2s_{34}s_{45}(s_{345}-s_{12})\right], \tag{8.29}$$

$$s_{34}s_{45}s_{56}b_{4;3} = -b_4 \frac{1}{2}\mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\}, \tag{8.30}$$

$$s_{34}s_{45}s_{56}b_{4;4} = b_4 \frac{s_{34}}{2E_1}\left[s_{123}\mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\} + 2s_{45}s_{56}(s_{123}-s_{12})\right], \tag{8.31}$$

$$s_{34}s_{45}s_{56}b_{4;5} = b_4 \frac{s_{34}s_{45}}{2E_1}\left[2s_{56}(s_{345}-s_{45}) - \mathrm{tr}\{\not{p}_3\not{p}_4\not{p}_5\not{p}_6\}\right]. \tag{8.32}$$

Die Abkürzungen $E_i$ bedeuten

$$E_1 = s_{123}s_{345} - s_{12}s_{45}, \tag{8.33}$$

$$E_2 = s_{234}s_{123} - s_{23}s_{56} \quad \text{und} \tag{8.34}$$

$$E_3 = s_{345}s_{234} - s_{34}s_{61}. \tag{8.35}$$

Folgende Vierpunktintegrale und deren zyklischen Permutationen werden benötigt:

$$\begin{aligned} I_4^d(p_1,p_2,p_3,p_{456}) = \\ &\frac{1}{s_{12}s_{23}}\Big(\frac{r_\Gamma}{\varepsilon^2}\big[(-s_{12})^{-\varepsilon} + (-s_{23})^{-\varepsilon} + \big((-s_{12})^{-\varepsilon} - (-s_{123})^{-\varepsilon}\big) \\ &\quad + \big((-s_{23})^{-\varepsilon} - (-s_{123})^{-\varepsilon}\big)\big] - 2F_1(s_{12},s_{23},s_{123})\Big) \end{aligned} \tag{8.36}$$

$$\begin{aligned} I_4^d(p_1,p_2,p_{34},p_{56}) = \\ &\frac{1}{s_{12}s_{234}}\Big(\frac{r_\Gamma}{\varepsilon^2}\big[(-s_{12})^{-\varepsilon} + \big((-s_{234})^{-\varepsilon} - (-s_{34})^{-\varepsilon}\big) \\ &\quad + \big((-s_{234})^{-\varepsilon} - (-s_{56})^{-\varepsilon}\big)\big] - 2F_2(s_{12},s_{234},s_{34},s_{56})\Big) \end{aligned} \tag{8.37}$$

[1] Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$ sind hier nicht wiedergegeben

$$I_4^d(p_1,p_2,p_3,p_4) = \frac{r_\Gamma}{s_{12}s_{14}}\left\{\frac{2}{\varepsilon^2}\left[(-s_{12})^{-\varepsilon}+(-s_{14})^{-\varepsilon}\right]-\ln^2\left(\frac{s_{12}}{s_{14}}\right)-\pi^2\right\} \tag{8.38}$$

Dabei wurde das Symbol $r_\Gamma = \Gamma(1+\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)^2/\Gamma(1-\varepsilon)$ verwendet.

Die beiden Funktionen $F_1$ und $F_2$ enthalten die IR-endlichen Anteile der Boxintegrale und können vollständig durch Logarithmen und Dilogarithmen dargestellt werden (s. ebenfalls [BGHS01]).

$$\begin{aligned} F_1(s_{12},s_{23},s_{123}) &= \\ &-\mathrm{Li}_2\left(1-\frac{s_{12}}{s_{123}}\right)-\mathrm{Li}_2\left(1-\frac{s_{23}}{s_{123}}\right)-\log\left(\frac{s_{12}}{s_{123}}\right)\log\left(\frac{s_{23}}{s_{123}}\right)+\frac{\pi^2}{6} \end{aligned} \tag{8.39}$$

$$\begin{aligned} F_2(s_{12},s_{234},s_{34},s_{56}) &= \\ &\mathrm{Li}_2\left(1-\frac{s_{34}}{s_{234}}\right)+\mathrm{Li}_2\left(1-\frac{s_{56}}{s_{234}}\right)+\frac{1}{2}\log\left(\frac{s_{12}}{s_{234}}\right)\log\left(\frac{s_{56}}{s_{234}}\right) \\ &+\frac{1}{2}\log\left(\frac{s_{34}}{s_{123}}\right)\log\left(\frac{s_{12}}{s_{56}}\right) \end{aligned} \tag{8.40}$$

Daneben werden auch noch die Dreipunkt-Integrale benötigt, die ebenfalls im Anhang von [BGHS01, S. 398] zu finden sind:

$$I_3^d(p_1,p_2,p_{3456}) = \frac{1}{s_{12}}\frac{r_\Gamma}{\varepsilon^2}\left[(-s_{12})^{-\varepsilon}\right] \tag{8.41}$$

$$I_3^d(p_1,p_{23},p_{456}) = \frac{1}{s_{23}-s_{123}}\frac{r_\Gamma}{\varepsilon^2}\left((-s_{23})^{-\varepsilon}-(s_{123})^{-\varepsilon}\right) \tag{8.42}$$

Das Dreipunktintegral mit allen Beinen off-shell besitzt die Darstellung

$$\begin{aligned} I_3^d(p_{12},p_{34},p_{56}) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Bigg\{&2\mathrm{Li}_2\left(1-\frac{1}{y_-}\right)+2\mathrm{Li}_2\left(1-\frac{1}{x_+}\right)+\frac{\pi^2}{3} \\ &+\frac{1}{2}\log^2\left(\frac{x_-}{y_+}\right)+\frac{1}{2}\log^2\left(\frac{x_+}{y_-}\right)-\frac{1}{2}\log^2\left(\frac{x_+}{y_+}\right)+\frac{1}{2}\log^2\left(\frac{x_-}{y_-}\right)\Bigg\} \end{aligned} \tag{8.43}$$

mit den Abkürzungen

$$x_\pm = \frac{1}{2s_{12}}\left(s_{12}+s_{34}-s_{56}\pm\sqrt{\lambda}\right), \tag{8.44}$$

$$y_\pm = \frac{1}{2s_{12}}\left(s_{12}-s_{34}+s_{56}\pm\sqrt{\lambda}\right) \quad \text{und} \tag{8.45}$$

$$\lambda = s_{12}^2+s_{34}^2+s_{56}^2-2s_{12}s_{34}-2s_{34}s_{56}-2s_{56}s_{12}-isgn(s_{12})\delta. \tag{8.46}$$

Die komplexe Wurzel $\sqrt{\lambda}=\sqrt{r\pm i\delta}$ mit $r\in\mathbb{R}$ kann auch ausgedrückt werden durch

$$\sqrt{r\pm i\delta} = \begin{cases}\sqrt{r}\pm i\delta, & \text{wenn } r\geq 0,\\ \pm i\sqrt{-r}, & \text{sonst.}\end{cases} \tag{8.47}$$

Das skalare, masselose Zweipunktintegral findet man leicht durch explizite Rechnung:

$$I_2^d(p^2) = \Delta - \ln\left(\frac{-p^2 - i\delta}{\mu^2}\right) + 2 \tag{8.48}$$

## Eingesetzte Software

Meine Arbeit wurde zu einem großen Teil von Software unterstützt, sowohl bei der Berechnung der Ergebnisse als auch während des Setzens mit LaTeX. Diese Auflistung soll einen kurzen Überblick geben und gleichzeitig den Softwareautoren eine Anerkennung für ihre unermüdliche Tätigkeit sein.

- Das LaTeX-Makropaket `thophys.sty` von Thorsten Ohl erleichterte mir das setzen von Formeln, die typisch für die Hochenergiephysik sind. Die Bracket-Notation ($\langle 0|\ldots|0\rangle$) und der Feynman-Slash ($\not{p}$) sind nur zwei von vielen Features.
- Das LaTeX-Paket `axodraw.sty` von J. A. M. Vermaseren [Ver94] bietet eine einfache Möglichkeit, Feynman-Diagramme direkt im LaTeX-Quellcode einzugeben.

  Homepage: `http://www.nikhef.nl/~form/FORMdistribution/axodraw/`
- Das LaTeX-Paket `listings.sty` von Carsten Heinz ist unter der LaTeX Public Project License auf jedem CTAN-Server erhältlich und dient zum Setzen von Programmlistings in LaTeX. Die Syntax von `FORM` wird leider standardmäßig nicht unterstützt und muss derzeit noch selbst definiert werden.

  Homepage: `http://dante.ctan.org/CTAN/macros/latex/contrib/listings/`
- `JaxoDraw` ist eine Java-Anwendung von D. Binosi und A. Theussl [BT04], die eine komfortable Oberfläche zum Paket `axodraw.sty` darstellt. Das Programm wird unter der GNU General Public License veröffentlicht.

  Homepage: `http://jaxodraw.sourceforge.net/`
- Wie auch das Paket `axodraw.sty` ist das Computeralgebrasystem `FORM` von J. A. M. Vermaseren [Ver00] Teil der `FORM`-Distribution. Zu beachten ist die Lizenz des Autors.

  Homepage: `http://nikhef.nl/~form/`
- `QGraf` ist ein Diagrammgenerator von P. Nogueira [Nog93], der in Form eines FORTRAN-Programm veröffentlicht wird.

  Homepage: `http://cfif.ist.utl.pt/~paulo/qgraf.html`
- `Maple`[2] und MATHEMATICA[3] wurden gelegentlich verwendet, vor allem um große Gleichungssysteme zu lösen. Beide Programme werden kommerziell vertrieben.

[2] `Maple` ist ein eingetragenes Warenzeichen von Waterloo Maple Inc.
[3] MATHEMATICA ist ein eingetragenes Warenzeichen von Wolfram Research Inc.

Homepage: http://www.maplesoft.com/
http://www.wolfram.com/products/mathematica/

- Eine große Anzahl von Linux und LaTeX Standard-Paketen, die hier leider nicht einzeln genannt werden können, kam ebenfalls zum Einsatz.

## 8.3 Hinweise zu FORM

### 8.3.1 Darstellung in FORM

Bei der Umsetzung der Rechnung in FORM habe ich versucht, drei wesentliche Aspekte der Programmierung zu berücksichtigen nämlich Modularisierung, Erweiterbarkeit und Wartbarkeit. Der Aspekt der Modularisierung konnte relativ problemlos durch das Konzept von Bibliotheken und Prozeduren umgesetzt werden. Störend ist dabei, dass das Prinzip lokaler Variablen in FORM nicht so konsequent umgesetzt wurde, wie in anderen Programmiersprachen.

Die Durchsetzung von Erweiterbarkeit musste an vielen Stellen aufgegeben werden, die z. B. spezifisch für eine bestimmte Anzahl äusßerer Beine sind und deshalb nicht für andere Projekte wiederverwendet werden können. Leider gestaltete es sich häufig einfacher ein neues Programm zu schreiben, als bestehenden Code wiederzuverwenden. Nichtsdestotrotz kann der Einsatz von Präprozessor-Konstanten und -Schleifen in einem gewissen Maße die Erweiterbarkeit bestehenden Codes steigern.

Unter Wartbarkeit verstehe ich nicht nur Dokumentation, die den Code erläutert, sondern auch die Möglichkeit einer gezielten Fehlersuche. Als Hilfsmittel hierfür bietet FORM die Möglichkeit von **Print**-Anweisungen und Advertisements, also eine kurze Beschreibung von **.sort**-Kommandos. Zur Programm-Verifikation trugen auch zahlreiche Test-Programme bei, die mit Hilfe der selbst geschriebenen Bibliotheks-Routinen verifizierbare Ergebnisse liefern sollten.

Die Darstellung einer Rechnung kann in FORM nicht immer eins zu eins übernommen werden, da häufig die sprachlichen Mittel nicht ausreichen oder FORM sich bei manchen Notationen unerwartet verhält. Eines der prominentesten Beispiele hierfür ist die Darstellung von Quotienten. Das folgende Programm-Beispiel zeigt, dass in FORM die Division keine normale Rechenoperation ist.

```
Vector v;
Symbol vsquare;

Local Expr = 1/v.v;

Id v.v = vsquare;
.sort

Print Expr;
.end
```

Das Ergebnis ist, dass die Ersetzung wird nicht ausgeführt wird. Nenner mit komplexen Ausdrücken sind eine häufige Fehlerquelle in FORM und werden deshalb in meinen Programmen soweit möglich durch die benutzerdefiniert Funktion INV ersetzt.

Ein weiteres Beispiel der von mir gewählten Darstellung der Ausdrücke ist folgende Prozedur, die die skalaren Integrale in ihre symbolische Darstellung überführt. Diese Routine wird in der Berechnung direkt nach der quadratischen Ergänzung der im Zähler stehenden $q_i q_j$ ausgeführt.

```
#procedure ScalarIntegration()

* Kürzung von im Zähler und im Nenner vorkommenden Propagatoren
Repeat Id IPROP(v?) * PROP(v?) = 1;

#do i=1,'LEGS'
id PROP(q'i') = PROP(k, r'i');
#enddo

#do i=0,{'LEGS'-1}
id diff(k?, d?)
#do j=1,{'LEGS'-'i'}
          * PROP(k?, r'j'?)
#enddo
          = i_ * POW(pi, d-2) * POW(mu, d-4) * POW(2, d-4)
          * SI(d, {'LEGS'-'i'}, r1, ..., r{'LEGS'-'i'});
#enddo
#endprocedure
```

Im Zähler stehende Propagatoren werden mit IPROP, im Nenner stehend mit PROP bezeichnet. Nach dem Kürzen der Propagatoren ist sichergestellt, dass keine inversen Propagatoren IPROP mehr vorkommen. Das eigentlich redundante Symbol diff(k, d) repräsentiert den Differential-Operator $d^d k$. Es könnte deshalb weggelassen werden, da ohnehin alle Terme einmal integriert werden. Jedoch bietet es eine Kontrolle, ob die Ersetzung in der Integrations-Routine fehlgeschlagen ist. Denn wenn alle Ersetzungen ausgeführt wurden, ist das Endergebnis frei vom Symbol diff. Da FORM keine allgemeine Möglichkeit der Exponenten-Bildung besitzt, werden Potenzen durch die benutzerdefinierte Funktion POW(basis, exponent) dargestellt. Diese müssen dann explizit gemäß der Potenzgesetze vereinfacht werden.

### 8.3.2 Beispiele rund um die Mandelstam-Variablen

Um die Möglichkeiten für Tipp-Fehler von Beginn an so weit wie möglich einzuschränken, ist es sinnvoll, die Definition der Mandelstam-Variablen nicht von Hand einzugeben, sondern automatisch generieren zu lassen. Hierbei kommt eine interessante Technik zum Einsatz, nämlich während der Rechnung zwischen FORM und Maple zu wechseln.

Das folgende Programm erzeugt weitgehend automatisch eine Datei mit Regeln, wie die Skalarprodukte $p_i p_j$ durch Mandelstam-Variablen zu ersetzen sind:

```
* @file: mandelstam.frm
*
* FORM(3.1)-Programm zur Generierung der Ausdrücke für
* die Mandelstam-Variablen in Sechs-Teilchen-Kinematik
* (alle Teilchen auf der Massenschale)

* Thomas Reiter, 12.04.2005

#-
* #- unterdrückt die Ausgabe des Programms
Off Statistics;

* Anzahl der äußeren Beine (nicht ändern!)
#define LEGS "6"

* Dateiname des zu erzeugenden Maple-Skripts
#define OUTFILE "mandel.mpl"

* Name der von Maple zu erzeugenden FORM-Datei
#define FORMFILE "mandelstam.h"

* SQR(p) = p.p;
CFunction SQR;

* Impulse
Vectors r1, ..., r'LEGS', p1, ..., p'LEGS';

* Hilfsvariablen
Autodeclare Symbols x;

.global

#do i=1,'LEGS'
Local s'i'{1+('i'%6)} = SQR(r{1+('i'%6)} - r{1+(('i'+4)%6)});
#enddo

#do i=1,3
Local s'i'{'i'+1}{'i'+2} = SQR(r{'i'+2} - r{1+(('i'+4)%6)});
#enddo

* Diese Gleichung muss von Hand eingefügt werden:
```

```
Local s234x = 2 * x15 + s61 + s56;

id SQR(r1?) = r1.r1;

* Impulserhaltung
id r'LEGS' = 0;

* Basiswechsel: r_i -> p_i
#do i=1,{'LEGS'-1}
id r'i' = p1 +...+ p'i';
#enddo


* on-shell Bedingung für masseloses Modell
id p1?.p1? = 0;
.sort:Plug in Momenta;

* Ersetze Skalarprodukte durch Variablennamen (für Maple)
#do i=1,{'LEGS'-1}
#do j='i',{'LEGS'-1}
id p'i'.p'j' = x'i''j';
#enddo
#enddo
.sort:Prepare for Maple;

Format Maple;

* Erzeuge Eintrag in der log-Datei
Print +f;

* Erzeuge Maple-Datei
*
* Datei-Kopf
#write <'OUTFILE'> "#␣file:␣'OUTFILE'"
#write <'OUTFILE'> "#␣date:␣'DATE_'"
#write <'OUTFILE'> "#␣Generated␣from␣'NAME_'␣%"
#write <'OUTFILE'> "by␣FORM␣'VERSION_'.'SUBVERSION_'"

* Gleichungs-System
#write <'OUTFILE'> "eq␣:=␣{"
#do i=1,6
#write <'OUTFILE'> "s'i'{1+('i'%6)}␣=␣%E," , s'i'{1+('i'%6)}
#enddo

```

```
#do i=1,3
#write <'OUTFILE'> "s'i'{'i'+1}{'i'+2}␣=␣%E," , s'i'{'i'+1}{'i'+2}
#enddo

#write <'OUTFILE'> "␣␣␣␣s234␣=␣%E␣" , s234x
#write <'OUTFILE'> "}:"

* Auflösen nach Skalarprodukten x_ij
#write <'OUTFILE'> "vars␣:=␣{%"
#write <'OUTFILE'> "x12,␣x13,␣x14,␣x15,␣x23,␣%"
#write <'OUTFILE'> "x24,␣x25,␣x34,␣x35,␣x45}:"
#write <'OUTFILE'> "s␣:=␣solve(eq,␣vars):"

* Ausgabe der Maple-Datei
#write <'OUTFILE'> "f␣:=␣fopen(\"'FORMFILE'\",␣WRITE);"

* Datei-Kopf:
#write <'OUTFILE'> "fprintf(f,␣\"*␣@file:␣'FORMFILE'\bn\"):"
#write <'OUTFILE'> "fprintf(f,␣\"*␣Created␣from␣'OUTFILE'\bn\"):"
#write <'OUTFILE'> "fprintf(f,␣\"*␣using␣%%s\bn\",%"
#write <'OUTFILE'> "␣kernelopts(version)):"

* „Fill Table"-Anweisungen
#do i=1,{'LEGS'-1}
#do j={'i'+1}, {'LEGS'-1}
#write <'OUTFILE'> "fprintf(f,%"
#write <'OUTFILE'> "␣\"Fill␣Mandelstam('i',␣'j')␣=␣%%a;\bn\",␣%"
#write <'OUTFILE'> "subs(s,␣x%s%s)):", 'i', 'j'
#enddo
#enddo

* Datei-Ende
#write <'OUTFILE'> "fclose(f);"
#write <'OUTFILE'> "#␣END␣OF␣FILE"
.clear

#message Rufen Sie nun maple mit der Datei "'OUTFILE'" auf!

.end

* END OF FILE
```

Das Programm erzeugt zunächst lokale Ausdrücke, die die Skalarprodukte enthalten, die den Mandelstam-Variablen zugeordnet sind. Um die Ausdrücke nicht mehrfach mit zyklisch vertauschten Indizes schreiben zu müssen bietet sich der Präprozessor-Rechner von `FORM` als geeignetes Hilfsmittel an. Betrachtet man z. B. den Ausdruck {1+(('i'+4)%6)}, so ist dieser für $i = 1$ gerade $1 + 5 = 6$, für $i > 1$ ist $i + 4 \geq 6$, d. h. die hintere Klammer wird modulo sechs gerechnet, und beginnt für $i = 2$ wieder bei 0. Eigentlich könnte man hier die Literale 6 und 4 noch durch die Konstanten 'LEGS' und ('LEGS'−2) ersetzen, was allerdings die Übersichtlichkeit der ohnehin verschachtelten Ausdrücke an dieser Stelle noch weiter minimieren würde. Zu bemerken ist noch, dass der Präprozessor Ausdrücke, die mit einer Klammer beginnen zum Teil nicht korrekt akzeptiert. Anstatt {('i' + 'j')*2} muss man deshalb {2*('i' + 'j')} schreiben.

Die Einführung der Variablen $x_{ij}$ ist notwendig, da beim Versuch, die Punktprodukte nach `Maple` zu exportieren verschiedene Schwierigkeiten entstanden. Anschließend wird die `Maple`-Datei ausgegeben, die das Lösen des linearen Gleichungssystems erledigt. Beim letzten Teil der `Maple`-Datei, nämlich dem Export der Lösung nach `FORM` ist vor allem die Anzahl, Reihenfolge und Art der Anführungszeichen eine sehr große Tippfehler-Quelle.

Ganz zum Ende des Programms wird eine Aufforderung ausgegeben, die erzeugte Datei mit `Maple` auszuführen. Bei einem komplexeren Projekt ist natürlich einer Stapelverarbeitung durch ein Werkzeug wie `make` der Vorzug zu geben.

Die Ausgabe des `Maple`-Programms ist im Folgenden wiedergegeben. Diese Datei enthält nur Befehle zum Füllen des halben Feldes, da die restlichen Zellen durch Symmetrie-Bedingungen gefüllt werden.

```
* @file: mandelstam.h
* Created from mandel.mpl
* using Maple 9.03, IBM INTEL LINUX, Oct 1 2003 Build ID XXXXXX
Fill Mandelstam(1, 2) = 1/2*s12;
Fill Mandelstam(1, 3) = 1/2*s123-1/2*s12-1/2*s23;
Fill Mandelstam(1, 4) = 1/2*s56-1/2*s123-1/2*s234+1/2*s23;
Fill Mandelstam(1, 5) = -1/2*s61+1/2*s234-1/2*s56;
Fill Mandelstam(2, 3) = 1/2*s23;
Fill Mandelstam(2, 4) = 1/2*s234-1/2*s23-1/2*s34;
Fill Mandelstam(2, 5) = 1/2*s61-1/2*s234-1/2*s345+1/2*s34;
Fill Mandelstam(3, 4) = 1/2*s34;
Fill Mandelstam(3, 5) = 1/2*s345-1/2*s34-1/2*s45;
Fill Mandelstam(4, 5) = 1/2*s45;
```

Der Code der Routinen zum Arbeiten mit Mandelstam-Variablen wurde in einer Bibliothek abgelegt und verwendet die von `mandelstam.frm` erzeugte Datei `mandelstam.h`.

```
* @file: common.h

* FORM(3.1)-Bibliothek für gemeinsam genutzte Routinen
* bei der Berechnung von Vielteilchen-Amplituden

* Thomas Reiter, 12. April 2005

```

```
*--#[ vectors:

#define LEGS "6"

Vectors r1, ..., r'LEGS', p1, ..., p'LEGS';
.global

*--#] vectors:

*--#[ mandelstam:

* Mandelstamvariablen
Symbols s123, s234, s345, s12, s23, s34, s45, s56, s61;

* Tabelle der Symbole s_ij, ausgedrückt durch Mandelstam-Variablen
Table, check, Mandelstam(1:{'LEGS'-1}, 1:{'LEGS'-1});

#procedure FillMandelstam()
* Befülle die Einträge in der Tabelle Mandelstam

* Die meisten Einträge wurden extern berechnet.
#include- mandelstam.h

* Die restlichen Einträge sind durch die Symmetrie definiert
#do j=1, {'LEGS'-1}
        Fill Mandelstam('j', 'j') = 0;
#do i={'j'+1},{'LEGS'-1}
        Fill Mandelstam('i', 'j') = Mandelstam('j', 'i');
#enddo
#enddo
#endprocedure

#procedure PluginMandelstam()
* Ersetze alle Skalarprodukte aus r_i oder p_i durch
* Mandelstam-Variablen

* Impulserhaltung ausnutzen
* und die r-Vektoren durch p-Vektoren ersetzen
Id r'LEGS' = 0;

#do l=1,{'LEGS'-1}
Id r'l' = p1 +...+ p'l';
#enddo

```

```
* Nach getaner Vorarbeit kann man einfach die Einträge
* der Tabelle verwenden.
#do i=1,{'LEGS'-1}
#do j=1,{'LEGS'-1}
Id p'i'.p'j' = Mandelstam('i', 'j');
#enddo
#enddo
#endprocedure


.global
*--#] mandelstam:

* Evtl. weitere Folds...

*--#[ init:

#call FillMandelstam()
.sort:init common.h;

*--#] init:
```

Ein Problem, das nur durch die Zusammenarbeit von FORM und Maple zu lösen war, ist die eindeutige Zuordnung von Spuren zu Produkten zweier Mandelstam-Variablen. Das Problem hierbei ist einen geeigneten Satz solcher Produkte zu finden und dann die Ausdrücke der Spuren eindeutig nach diesen Produkten aufzulösen. Dieser Schritt war nötig bei der Berechnung der Koeffizienten der Integrale $I_5^d$, da die Berechnung wesentlich vereinfacht werden konnte, wenn als Koeffizienten wieder Spuren auftraten anstatt Mandelstam-Variablen. Ein Programm zu dieser Rückwärts-Ersetzung wird von folgendem Code erzeugt:

```
* @file: traces.frm
*
* FORM(3.1)-Programm zur Generierung der Ausdrücke, die den Spuren
* tr{\not{p}_i\not{p}_j\not{p}_k\not{p}_l} in der der Sechs-Teilchen-Kinematik entsprechen.
* Der zweite Teil des Programms erzeugt eine MAPLE(tm)-Datei,
* die wiederum ein FORM-Programm ausgibt, welches die
* Koeffizienten der I_5^d-Integrale durch Spuren ersetzt.

* Thomas Reiter, 12.04.2005

* Alle Ausgaben ab hier nur noch in die log-Datei schreiben
#-
Off Statistics;
```

```
#include- common.h #vectors
#include- common.h #mandelstam

* Bibliothek initialisieren
#include common.h #init

#define file "traces.mpl"
#define FORMfile "traces.h"

* Zuerst habe ich sämtliche Produkte von Mandelstam-Variablen definiert,
* da nur ein wenig ‚trial and error‘ zum Erfolg führte.
#define X1  "s12␣*␣s23"
#define X2  "s23␣*␣s34"
#define X3  "s34␣*␣s45"
#define X4  "s45␣*␣s56"
#define X5  "s56␣*␣s61"
#define X6  "s61␣*␣s12"

#define X7  "s12␣*␣s45"
#define X8  "s23␣*␣s56"
#define X9  "s34␣*␣s61"

#define X10 "s61␣*␣s123"
#define X11 "s12␣*␣s234"
#define X12 "s23␣*␣s345"
#define X13 "s123␣*␣s34"
#define X14 "s234␣*␣s45"
#define X15 "s345␣*␣s56"

* Diese Produkte liefern ein nicht-singuläres Gleichungssystem:
#define P1 "'X1'"
#define P2 "'X2'"
#define P3 "'X3'"
#define P4 "'X4'"
#define P5 "'X5'"
#define P6 "'X15'"

Symbols x1, ..., x'LEGS';
.global:Globals;

* Die Produkte P1 bis P6 sollen durch diese Spuren ersetzt werden:
Local tr1234 = g_(1, p1, ..., p4);
Local tr2345 = g_(1, p2, ..., p5);
```

```
Local tr3456 = g_(1, p3, ..., p6);
Local tr4561 = g_(1, p4, p5, p6, p1);
Local tr5612 = g_(1, p5, p6, p1, p2);
Local tr6123 = g_(1, p6, p1, p2, p3);

#define Traces "1"

.sort:Define Traces;


* Spuren berechen
TraceN, 'Traces';

* Impulserhaltung
Id p'LEGS' = -1 * (p1 +...+ p{'LEGS'-1});

.sort:Prepare Expressions;

* Hier kommt die Mandelstam-Bibliothek zum Zuge.
#call PluginMandelstam()

.sort:Mandelstam;

* Ersetze Variablen für Maple
#do i=1,'LEGS'
id `P`i'' = x'i';
#enddo

.sort:Prepare for Maple;

* Ausgabe der Maple-Datei
#write <'file'> "# file: 'file'"
#write <'file'> "# date: 'DATE_'"
#write <'file'> "# Generated from 'NAME_'%"
#write <'file'> " by FORM 'VERSION_'.'SUBVERSION_'"

#write <'file'> "eqs := {"
#write <'file'> "   tr(p1, p2, p3, p4) = %E,", tr1234
#write <'file'> "   tr(p2, p3, p4, p5) = %E,", tr2345
#write <'file'> "   tr(p3, p4, p5, p6) = %E,", tr3456
#write <'file'> "   tr(p4, p5, p6, p1) = %E,", tr4561
#write <'file'> "   tr(p5, p6, p1, p2) = %E,", tr5612
#write <'file'> "   tr(p6, p1, p2, p3) = %E",  tr6123
#write <'file'> "}:"
```

```
#write <'file'> "vars␣:=␣{x1,␣x2,␣x3,␣x4,␣x5,␣x6}:"
#write <'file'> "soln␣:=␣solve(eqs,␣vars):"
#write <'file'> "fd␣:=␣fopen(\"'FORMfile'\",␣WRITE):"

#do i=1,'LEGS'
#write <'file'> "fprintf(fd,␣\"Id␣SI(d?,␣5,␣?all)␣*␣`P`i''␣=\bn\"):"
#write <'file'> "fprintf(fd,␣\"␣␣␣␣SI(d,␣5,␣?all)␣*␣(%%a);\bn\",␣%"
#write <'file'> "subs(soln,␣x'i')):"
#enddo

#write <'file'> "fclose(fd):"

#message Fuehren Sie nun bitte maple mit der Datei "'file'" aus!
.end
* END OF FILE
```

Die Arbeitsweise ist hier ähnlich wie bereits im Programm `mandelstam.frm`. Zuerst werden Ausdrücke erzeugt, welche in `Maple` ein lineares Gleichungssystem bilden. Die Lösung dieses Gleichungssystem wird als Ersetzungsregeln wieder nach `FORM` exportiert. Erwähnenswert ist hier, dass die erzeugten Ersetzungsregeln nur auf Koeffizienten der $I_5^d$-Integrale wirken, die ich in `FORM` durch die Funktionen SI(d, 5, ?momenta) dargestellt habe. Außerdem zeigt dieses Beispiel die Möglichkeit, Präprozessor-Variablen zu verschachteln; der Ausdruck ‘P‘i’’ erzeugt für $i = 1$ z. B. zunächst den Präprozessor-Ausdruck ‘P1’, welcher dann mit dem eigentlichen Inhalt von $P_1$ ersetzt wird.

### 8.3.3 Summation über Permutationen

Das folgende kurze Programm-Beispiel zeigt einen Algorithmus, um in `FORM` alle Permutationen der Argumente einer Funktion zu generieren. Das Beispiel demonstriert dies anhand der Sechspunkt-Amplitude und reduziert anhand deren Symmetrien die Anzahl der Permutationen soweit, dass nur nicht-triviale Permutationen mit den richtigen Multiplizitäten in das Ergebnis eingehen.

```
* @file: permutation.frm
*
* FORM(3.1)-Programm zur Generierung aller Permutationen
* der S_6 mit anschließender Kürzung aller
* redundanten Permutationen
*
* Thomas Reiter, 06.07.2005
*

* Anzahl der äußeren Felder der Amplitude
#define LEGS "6"
```

```
*
* Der Permutationsalgorithmus arbeitet mit drei
* nicht vertauschbaren Hilfsfunktionen A, B und C
* Die Funktion Perm(g, x_1, x_2, x_3, ..., x_n) erzeugt
* die Summe über alle Permutationen p
* der x_1, ..., x_n von g(x_p(1), x_p(2), ..., x_p(n))
*
Functions A, B, C;
CFunction Perm, Temp;

#procedure GeneratePermutations(Perm)
*
* Der Permutationsalgorithmus
* Perm ist die Funktion, deren Argumente vertauscht werden sollen
*
Id 'Perm'(Temp?, ?args) = A(Temp, ?args) * B(Temp);

Repeat;
        Id A(Temp?, p1?, ?Aargs) * B(Temp?, ?Bargs) =
                + C(Temp, p1) * A(Temp, ?Aargs, ?Bargs) * B(Temp)
                + A(Temp, ?Aargs) * B(Temp, ?Bargs, p1);
        Id C(Temp?, ?args1) * C(Temp?, ?args2) =
                C(Temp, ?args1, ?args2);
        Id A(Temp?) * B(Temp?) = 1;
        Id A(Temp?) = 0;
EndRepeat;
.sort:Gen. Perm. 1;

Id C(Temp?, ?args) = Temp(?args);
.sort:Gen. Perm. 2;

#endprocedure

* Die Funktion Amp repräsentiert die Amplitude,
* die Funktion sgn das Signum einer Permutation
*
CFunctions Amp, sgn;

Vectors p1, ..., p'LEGS';

.global

* Die Gesamt-Amplitude, d.h. die Summe aller Permutationen der
```

```
* impulsgeordneten Amplitude wird in FullAmp berechnet.
Local FullAmp = Perm(Amp, p1, ..., p'LEGS');

#call GeneratePermutations(Perm)

*
* Vereinfachungen fuer die Hexagon-Amplitude
*

* Alle Permutationen mit negativer Signum-Funktion können
* durch Spiegelung aus einer Permutation positiven
* Signums gewonnen werden.

* Berechne das Signum der Permutationen
Id Amp(?all) = sgn(?all) * Amp(?all);

AntiSymmetrize sgn;
Id sgn(p1, ..., p'LEGS') = 1;

Bracket Amp;
.sort:Calc. Signs;

* und lasse alle Terme negativen Vorzeichens weg,
* multipliziere dafür mit 2
Collect sgn;
Id sgn(-1) = 0;
Id sgn(1) = 1;
Multiply 2;

.sort:Symmetries 1;

* Zyklische Symmetrie ausnutzen
CycleSymmetrize Amp;

.sort:Symmetries 2;

Print +s;

.end

* END OF FILE
```

Einige Programmteile bedürfen einer näheren Erläuterung. Die Prozedur Generate-Permutations arbeitet im wesentlichen nach dem Prinzip, jeweils das erste Argument der

Funktion A an das Ende der Parameterliste von B anzuhängen und gleichzeitig einen weiteren Term zu produzieren, in dem nur noch ein Teil der Argumente verschoben wird, dafür ein Argument in der Funktion C festgehalten wird.

Die Gesamt-Amplitude wird in dem Ausdruck FullAmp berechnet. Dazu werden zuerst alle Permutationen erzeugt. Um festzustellen, welche Permutationen durch Spiegelungen auseinander hervorgehen, wird zunächst eine Signum Funktion vor jeden Term multipliziert und durch eine **AntiSymmetrize**-Anweisung das Vorzeichen bestimmt, also 1, falls die lexikalische Ordnung durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen zweier Elemente erzeugt werden kann und $-1$ sonst. Um die Vorzeichen untersuchen zu können müssen sie als Argumente in einer Funktion verpackt werden. Durch die **Bracket**-Anweisung werden die Amplituden-Funktionen ausgeklammert, und in der Klammer bleiben gerade die Vorzeichen zurück. Durch die Anweisung **Collect** sgn; werden nun alle in Klammern befindlichen Ausdrücke in Argumente der Funktion `sgn` verpackt. Durch die Anweisung **Id** sgn($-1$)=0; werden alle Terme mit negativem Vorzeichen gelöscht. Um das fehlen dieser Terme wieder zu korrigieren, wird jeder verbleibende Term mit einem Faktor 2 multipliziert. Zuletzt nutzt man die zyklische Symmetrie der Amplitude aus, was im Falle der Hexagon-Amplitude die Anzahl der Terme um den Faktor sechs reduziert.

Liegt die impulsgeordnete Amplitude in einer weiteren Datei vor, z. B.

```
* Datei: amp.h
Id Amp(p1?, ..., p6?) = ** eigentlicher Ausdruck ...
```

so bleibt als letzter Schritt nur noch das Einsetzen des Ergebnisses, z. B. mittels einer Include-Direktive (**#include**− amp.h). Das Minus verhindert dabei die Anzeige der eingelesenen Datei während der Ausführung.

### 8.3.4 Die Passarino-Veltman-Methode

Als letztes und umfangreichstes Beispiel möchte ich eine Möglichkeit vorstellen, die Tensor-Reduktions-Koeffizineten mit Hilfe der Passarino-Veltman-Methode zu berechnen. Dieses Programm macht massiven Gebrauch von `FORM`s Präprozessor, sowie von den sogenannten Dollar-Variablen[4], einem Sprachmerkmal, das erst mit der Version 3.1 eingeführt wurde. Das Programm wurde in zwei Teile aufgespalten, einer Bibliothek `pvtools.h` und dem Haupt-Programm `passarino.frm`. Der grobe Programm-Ablauf ist gegliedert in Erzeugung der Gleichungen und Ausgabe in eine `Maple`-Datei, welche das Gleichungs-System löst und die Lösung wieder nach `FORM` exportiert. Als Ergebnis werden zwei `FORM`-Dateien erzeugt, nämlich die Datei `ti`$l$-$r$`.h`, welche den Ansatz für das Integral enthält und die Datei `tc`$l$-$r$`.h`, in der die Koeffizienten abgelegt sind. Dabei steht $l$ für die Anzahl der Beine und $r$ für den Rang des Integrals.

```
* @file: passarino.frm
* FORM(3.1) Programm zur Berechnung der Tensor-Koeffizienten nach der
* Passarino-Veltman-Methode.
```

[4] Diese Variablen erhielten ihren Namen wegen des vorangestellten ‚$'-Zeichens.

```
* Thomas Reiter, 21.07.05

* Programm-Parameter
#define LEGS "2"
#define RANK "1"

* Datei-Namen der temporären Dateien und Ausgabe-Dateien
#define file "tc'LEGS'-'RANK'.mpl"
#define TCFILE "tc'LEGS'-'RANK'.h"
#define TIFILE "ti'LEGS'-'RANK'.h"

* Symbole, die in der Ausgabe verwendet werden sollen
#define M "m"
#define R "r"
#define MU "mu"
#define D "d"
#define TI "TI"
#define SI "SI"
#define TC "TC"

* DOT repräsentiert das Skalarprodukt,
* INV das multiplikative Inverse
#define DOT "DOT"
#define INV "INV"
#-

#if 'RANK' > 'LEGS'
#message Fehler RANK(= 'RANK') > LEGS(= 'LEGS') !!!
#terminate
#endif

#include- pvtools.h

* Ansatz berechnen
Global TIAnsatz = TI('D', 'LEGS', 'RANK',
          'MU'1, ..., 'MU''RANK',
          'R'1, ..., 'R''LEGS',
          'M'1, ..., 'M''LEGS');

#call Ansatz

* Ansatz ausgeben
#call FORMHead('TIFILE')
```

```
#write <`TIFILE'>, "Id␣TI(`D'?,␣`LEGS',␣`RANK'%"
#do i=1,`RANK'
#write <`TIFILE'>, ",␣`MU'`i'?%"
#enddo
#do i=1,`LEGS'
#write <`TIFILE'>, ",␣`R'`i'?%"
#enddo
#do i=1,`LEGS'
#write <`TIFILE'>, ",␣`M'`i'?%"
#enddo
#write <`TIFILE'>, ")␣=␣"

#write <`TIFILE'>, "%e", TIAnsatz
#write <`TIFILE'>, "*␣END␣OF␣FILE"

#message Der Ansatz wurde ausgegeben in die Datei "`TIFILE'".

.store

Format Maple;

#call MapleHead(`file')
#write <`file'>, "with(LinearAlgebra):"

* Erzeuge Gleichungs-System

#write <`file'>, "eq␣:=␣{"

#do i=1, `$counter'
Global TITerm`i' = TIAnsatz * pvHelp(`i');
* Einen Term auswählen
Id pvHelp(`D'?) * `TC'(`D', `LEGS', `RANK', `D'?, ?tail) = 1;
Id `TC'(?any) = 0;

.sort:Choose Term 1;
#$selector = 0;
If($selector) Discard;

$selector=$selector+1;

.sort:TITerm is ready;

#if `$selector' > 0
```

```
* Entsprechende Terme im Integral ausprojezieren
Global TIExpression'i' = TITerm'i' * pvDiff(k, 'D') *
        <k('MU'1)> *...* <k('MU''RANK')> *
        <PROP(k, 'R'1, 'M'1)> *...* <PROP(k, 'R''LEGS', 'M''LEGS')>;

Global TIAnsatz'i' = TITerm'i' * TIAnsatz;
.store

Local Integral'i' = TIExpression'i';
#call Integrate

* Hier könnte z.B. zusätzlich eine
* Reduktion der Skalar-Integrale durchgeführt werden.

Local TIIAnsatz'i'= TIAnsatz'i';
Id pv1?.pv2? = 'DOT'(pv1, pv2);
.sort

#write <'file'>, "%E␣=␣%E,", TIIAnsatz'i', Integral'i'
#endif

.store
#enddo

#write <'file'>, "␣1=1␣}␣minus␣{1=1}:"

* Erzeuge Eine Liste aller Tensor-Koeffizienten
#write <'file'>, "vars␣:=␣{"
#do i=1,'$counter'
Local TC'i' = TIAnsatz;

* Erzeuge Eine Liste aller Tensor-Koeffizienten
Repeat Id pv1?RR(RHO?) = 1;
Repeat Id dd_(RHO?, SIGMA?) = 1;
.sort:WriteTC 1;
* Die Liste existiert nun in Form einer Summe
Id 'TC'('D', 'LEGS', 'RANK', 'i', ?tail) = pvHelp('i');
Id 'TC'(?all) = 0;
.sort:WriteTC 2;

* Terme zählen
#$term = 0;
$term = $term + 1;
.sort:WriteTC 3;
```

```
* Wenn Term existiert...
#if ('$term' > 0)
* ... dann schreibe Tensor-Koeffizienten in Datei
#write <'file'>, "'TC'('D',␣'LEGS',␣'RANK',␣'i'%"
#do xl=1,'LEGS'
#write <'file'>, ",␣'R''xl'%"
#enddo
#do xl=1,'LEGS'
#write <'file'>, ",␣'M''xl'%"
#enddo
#write <'file'>, ")%"
#write <'file'>, "␣=␣'TC''i',"
#endif

.store
#enddo
#write <'file'>, "␣0␣}␣minus␣{0,␣0}␣:"

#write <'file'>, "varList␣:=␣convert(vars,␣list):"
#write <'file'>, "LGS␣:=␣GenerateMatrix(subs(varList,␣eq),%"
#write <'file'>, "␣map(ex␣->␣op(-1,␣ex),␣varList),␣augmented=true):"
#write <'file'>, "RHS␣:=␣convert(LinearSolve(LGS),␣list):"
#write <'file'>, "#␣Ausgabe␣vorbereiten:"
#write <'file'>, "LHS␣:=␣map(a␣->␣cat(\"'TC'('D'?,␣'LEGS',␣'RANK',%"
#write <'file'>, "␣\",␣convert(op(4,␣op(1,␣a)),␣string),␣\"%"
#do i=1,'LEGS'
#write <'file'>, ",␣'R''i'?%"
#enddo
#do i=1,'LEGS'
#write <'file'>, ",␣'M''i'?%"
#enddo
#write <'file'>, ")\"),␣varList):"
#write <'file'>, "LINES␣:=␣zip((l,␣r)␣->␣sprintf(\"Id␣%%s␣=\bn␣%"
#write <'file'>, "%%a;\",␣l,␣r),␣LHS,␣RHS):"
#write <'file'>, "f␣:=␣fopen(\"'TCFILE'\",␣WRITE):"
#write <'file'>, "for␣l␣in␣LINES␣do"
#write <'file'>, "␣␣␣fprintf(f,␣\"%%s\bn\bn\",␣l):"
#write <'file'>, "end␣do:"
#write <'file'>, "fclose(f):"
#write <'file'>, "#␣END␣OF␣FILE"

#message Um die Datei "'TCFILE'" zu erzeugen,
#message geben Sie bitte "maple␣'file'" ein.
```

```
180 .end

* END OF FILE
```

Um Kollisionen mit Namen aus weiteren Programm-Paketen zu vermeiden werden alle Symbole, die in der Ausgabe erscheinen, durch Präprozessor-Definitionen eingeführt, so dass es problemlos möglich ist, die Symbole umzubenennen. Ebenso werden der Tensor-Rang und die Anzahl der externen Impulse als Programm-Parameter festgelegt. Die unterschiedlichen Koeffizienten können also durch anpassen der beiden Parameter RANK und LEGS erzeugt werden.

Als erster Programm-Schritt wird der Ansatz für das Tensor-Integral erzeugt. Dies geschieht in der extern definierten Prozedur ‚Ansatz' aus der Bibliothek `pvtools.h`. Für den Ansatz werden zunächst, durch Multiplikation mit der Funktion ‚pvSelect' und die folgenden Ersetzungen, alle möglichen Kombinationen der Impulse $r_1, \ldots r_l$ mit den Indizes $\mu_1, \ldots, \mu_r$ erzeugt. Später werden Paare des Vektors ‚pvG' durch den metrischen Tensor $g^{\mu\nu}$ ersetzt. In den Zeilen 94–100 wird die Funktion ‚pvHelp' eingeführt, um Vektoren, die sich nur im Index unterscheiden, miteinander zu identifizieren, da diese mit dem gleichen Tensor-Koeffizienten versehen werden. Die folgende **Bracket**- und **Keep Brackets**-Anweisung klammern die zu untersuchenden Terme aus; der in Klammern stehende Teil des Ausdrucks bleibt bis zum Modul-Ende unberücksichtigt. Die Dollar-Variable $counter ermöglicht es nun, jeden Term in der Summe mit einem unterschiedlichen Index zu versehen, da die Anweisung $counter=$counter+1; ein Mal pro Term ausgeführt wird. Ab Zeile 113 werden die metrischen Tensoren erzeugt. Die Variable ‚GFact' sorgrt dafür, dass nur Terme mit einer geraden Anzahl von Hilfs-Vektoren zu metrischen Tensoren ersetzt wird. Die **PolyFun**-Anweisungen werden hier verwendet, um sämtliche numerischen Vorfaktoren zu entfernen, da diese vollständig in die Definition der Tensor-Koeffizienten aufgenommen werden können.

```
* @file: pvtools.h
* FORM(3.1) Bibliothek mit Routinen für die
* Passarino-Veltman-Methode.

* Thomas Reiter, 21.07.05

* Definition der Symbole, Funktionen und Vektoren

* Bezeichner für die Ausgabe
CFunctions 'TI', 'SI', 'TC';
Symbol 'D';
Indices 'MU'1, ..., 'MU''RANK';
Vectors 'R'1, ..., 'R''LEGS';
Symbols 'M'1, ..., 'M''LEGS';
CFunction 'DOT', 'INV';

* Interne Bezeichner
```

```
* Definitionen für die Integration
CFunctions pvDiff, PROP, IPROP;
Vector k;

* Definitionen für die Prozedure Ansatz
CFunctions pvTail, pvSelect, pvHelp, pvDD;
Symbol GFact;

Symbol X;
Indices RHO, SIGMA;
Vectors pvG, pv1, ..., pv'LEGS';

Set RR: 'R'1, ..., 'R''LEGS';
Set MM: 'M'1, ..., 'M''LEGS';

* Definitionen für die Prozedur GeneratePermutations
Functions permA, permB, permC;
CFunction permTemp;

#procedure GeneratePermutations(Perm)
* Der Permutations-Algorithmus wird bereits in
* Abschnitt 8.3.3 erläutert
Id 'Perm'(permTemp?, ?args) =
        permA(permTemp, ?args) * permB(permTemp);

Repeat;
        Id permA(permTemp?, RHO?, ?Aargs) *
                permB(permTemp?, ?Bargs)
        =       + permC(permTemp, RHO) *
                        permA(permTemp, ?Aargs, ?Bargs) *
                        permB(permTemp)
                + permA(permTemp, ?Aargs) *
                        permB(permTemp, ?Bargs, RHO);
        Id permC(permTemp?, ?args1) *
                permC(permTemp?, ?args2)
        =       permC(permTemp, ?args1, ?args2);
        Id permA(permTemp?) * permB(permTemp?) = 1;
        Id permA(permTemp?) = 0;
EndRepeat;
.sort:Gen. Perm. 1;

Id permC(permTemp?, ?args) = permTemp(?args);
.sort:Gen. Perm. 2;
#endprocedure
```

```
#procedure Ansatz
* Erzeugt einen Ansatz für das Tensor-Integral,
* in dem die Tensor-Koeffizienten definiert werden
*
Id 'TI'('D', 'LEGS', 'RANK',
        'MU'1, ..., 'MU''RANK',
        'R'1, ..., 'R''LEGS',
        'M'1, ..., 'M''LEGS')
=
        pvTail('D', 'LEGS', 'RANK',
               'R'1, ..., 'R''LEGS',
               'M'1, ..., 'M''LEGS');

* Erzeuge alle Kombinationen von Impulsen und
* Tensor-Indizes
#do i=1,'RANK'
Multiply pvSelect('MU''i', 'R'1, ..., 'R''LEGS', pvG);
#enddo

Repeat;
        Id pvSelect(RHO?, pv1?, ?tail) =
               pv1(RHO) + pvSelect(RHO, ?tail);
        Id pvSelect(RHO?) = 0;
EndRepeat;

* Nutze Impuls-Erhaltung
Id 'R''LEGS' = 0;
Id 'R''LEGS'(RHO?) = 0;

.sort:Ansatz 1;

* Identifiziere Terme mit gleichen Impulsen
Id pv1?(RHO?) = pv1(RHO) * pvHelp(pv1);
Repeat Id pvHelp(?all1) * pvHelp(?all2) = pvHelp(?all1, ?all2);

Symmetrize pvHelp;

* Setze Tensor-Koeffizient ein
Bracket pvHelp, pvTail;
.sort:Ansatz 2;

#$counter = 0;

```

```
Keep Brackets;

$counter = $counter+1;
Id pvTail('D', 'LEGS', 'RANK' ?tail) * pvHelp(?any)=
                    'TC'('D', 'LEGS', 'RANK', $counter, ?tail);
.sort:Ansatz 3;

* Fasse Hilfsvektoren g zu Tensor g^{\mu_i\mu_j} zusammen
Multiply pvHelp(pvDD);
Repeat;
        Id pvHelp(?all) * pvG(RHO?) = pvHelp(?all, RHO) * GFact;
        Id GFact * GFact = 1;
EndRepeat;
Id GFact = 0;
Id pvHelp(pvDD) = 1;
#call GeneratePermutations(pvHelp);

Id pvDD(?all) = dd_(?all);

.sort:Ansatz 4;

* Kürze Vorfaktoren
PolyFun pvHelp;

.sort:Ansatz 5;
PolyFun;
Id pvHelp(?all) = 1;

.sort:Ansatz 6;

#endprocedure

#procedure Integrate
* Integration ausführen

* Propagatoren kürzen
* Benutze Impulserhaltung: r_{LEGS} = 0

Repeat Id k.k = IPROP(k, 'R''LEGS', 'M''LEGS') + 'M''LEGS'^2;
Repeat Id k.pv1?RR['D'] = 1/2 * (
        + IPROP(k, pv1, MM['D'])
        - IPROP(k, 'R''LEGS', 'M''LEGS')
        - pv1.pv1 - MM['D']^2 - 'M''LEGS'^2 );
```

```
.sort:Integrate 1;

Repeat Id PROP(?all) * IPROP(?all) = 1;

* Skalarprodukte trennen
Id IPROP(k, pv1?, X?) = k.k + pv1.pv1 + 2 * k.pv1 - X^2;
#do r=1, 'RANK'
Id k.pv1? = pvHelp(k, 'MU''r') * pvHelp(pv1, 'MU''r');
#enddo
.sort:Integrate 2;

* Integrale mit $I_n^d$ und $I_n^{d,\mu_1,\mu_2,\dots}$ identifizieren
* Tensor-Integrale
#do r='RANK',1,-1
#do l='LEGS',1,-1
Id
#do xl=1,'l'
        PROP(k, 'R''xl'?, 'M''xl'?) *
#enddo
#do xr=1,'r'
        pvHelp(k, 'MU''xr'?) *
#enddo
        pvDiff(k, 'D') =
        TI('D', 'l', 'r', 'MU'1, ..., 'MU''r',
                'R'1, ..., 'R''l',
                'M'1, ..., 'M''l');
#enddo
#enddo

* Skalar-Integrale
#do l='LEGS',1,-1
Id
#do xl=1,'l'
        PROP(k, 'R''xl'?, 'M''xl'?) *
#enddo
        pvDiff(k, 'D') =
        SI('D', 'l',
                'R'1, ..., 'R''l',
                'M'1, ..., 'M''l');
#enddo

Id pvHelp(pv1?, RHO?) = pv1(RHO);
.sort:Integrate 3;
```

```
    #endprocedure

195 #procedure MapleHead(file)
    #write <'file'> "# @file: 'file'"
    #write <'file'> "# date: 'DATE_'"
    #write <'file'> "# Generated from 'NAME_' %"
    #write <'file'> "by FORM 'VERSION_'.'SUBVERSION_'"
200 #endprocedure

    #procedure FORMHead(file)
    #write <'file'> "* @file: 'file'"
    #write <'file'> "* date: 'DATE_'"
205 #write <'file'> "* Generated from 'NAME_' %"
    #write <'file'> "by FORM 'VERSION_'.'SUBVERSION_'"
    #endprocedure
    .global
```

Nach der Ausgabe des Ansatzes, folgt im Haupt-Programm die Erzeugung des Gleichungssßystems. Dazu werden alle möglichen Kombinationen der Vektoren $r_i$ zusammen mit dem metrischen Tensor $g$ auf den Ansatz für das Tensor-Integrals zum einen und auf das definierende Integral zum anderen projeziert. Dadurch entstehen jeweils die beiden Seiten einer skalaren Gleichung, die zusammen das definierende Gleichungs-System der Tensor-Koeffizienten ergeben.

Um die oben genannten Vektor-Index-Kombinationen nicht erneut erzeugen zu müssen, bedient sich das Programm eines Tricks. In dem globalen Ausdruck ‚TIAnsatz' befindet sich bereits eine Summe aller gewünschten derartigen Kombinationen. Diese lassen sich anhand der Tensor-Koeffizienten auswählen, was in den Zeilen 78ff. geleistet wird. Das mitzählen der Variable $selector bewirkt, dass nur die erste zu einem Tensor-Koeffizienten gehörende Index-Permutation in das Gleichungssystem eingeht, und alle anderen Terme durch die Anweisung

```
If($selector) Discard;
```

gelöscht werden. Würde man alle Terme stehen lassen, dann würde man das Gleichungs-System unnötig aufblähen.

Die Variable $selector hat auch noch einen zweiten Zweck. Durch die Zeile

```
#if '$selector' > 0
```

wird nämlich sichergestellt, dass keine Gleichungen der Form $0 = 0$ erzeugt werden.

Die Routine ‚Integrate' führt zunächst eine quadratische Ergänzung der Skalar-Produkte im Zähler durch, um so Propagatoren in Zähler und Nenner des Integrals kürzen zu können. Alle ungekürzten Propagatoren im Zähler werden nach dem Kürzen wieder ausgeschrieben, und erzeugen so Tensor-Integrale niedereren Ranges und Skalar-Integrale. Beim Aufsammeln der Terme in den Zeilen 162ff. ist es wichtig, die Schleifen mit fallendem Schleifenzähler zu durchlaufen, da ansonsten Propagatoren unersetzt stehen bleiben.

Als letzter Teil des Programms verbleibt die Ausgabe des `Maple`-Codes. Da in diesem Fall im Gegensatz zu den meisten anderen Beispielen die Größe des Gleichungssystems nicht aus dem Programm heraus vorhergesagt wird, muss bei der Ausgabe der Liste am Ende ein Schein-Eintrag, z. B. $1 = 1$, angehängt werden[5], welcher zuletzt durch den Operator $\{\ldots\}$`minus`$\{1 = 1\}$ in `Maple` wieder entfernt wird.

[5] Ohne diesen Schein-Eintrag bliebe nach dem letzten Listen-Eintrag ein überflüssiges Komma stehen, das in `Maple` zu einem Syntax-Fehler führen würde.

# Literaturverzeichnis


[A+05] Y. Ashie et al., *A measurement of atmospheric neutrino oscillation parameters by Super-Kamiokande I*, Phys. Rev. **D71**, 112005 (2005), `hep-ex/0501064`.

[AdBF91] U. Amaldi, W. de Boer and H. Furstenau, *Comparison of grand unified theories with electroweak and strong coupling constants measured at LEP*, Phys. Lett. **B260**, 447–455 (1991).

[ATD] *ATLAS detector and physics performance. Technical design report. Vol. 2*, CERN-LHCC-99-15.

[BD90] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistische Quantenfeldtheorie*, BI-Wissenschafts-Verlag, Mannheim and Wien and Zürich, 1990, Unveränd. Nachdr., Originaltitel: Relativistic Quantum Fields.

[BDDK95] Z. Bern, L. J. Dixon, D. C. Dunbar and D. A. Kosower, *Fusing gauge theory tree amplitudes into loop amplitudes*, Nucl. Phys. **B435**, 59–101 (1995), `hep-ph/9409265`.

[BDK94] Z. Bern, L. J. Dixon and D. A. Kosower, *Dimensionally regulated pentagon integrals*, Nucl. Phys. **B412**, 751–816 (1994), `hep-ph/9306240`.

[BDP05] S. J. Bidder, D. C. Dunbar and W. B. Perkins, *Supersymmetric Ward identities and NMHV amplitudes involving gluinos*, (2005), `hep-th/0505249`.

[BGH00] T. Binoth, J. P. Guillet and G. Heinrich, *Reduction formalism for dimensionally regulated one-loop N-point integrals*, Nucl. Phys. **B572**, 361–386 (2000), `hep-ph/9911342`.

[BGH+05] T. Binoth, J. P. Guillet, G. Heinrich, E. Pilon and C. Schubert, *An algebraic / numerical formalism for one-loop multi-leg amplitudes*, (2005), `hep-ph/0504267`.

[BGHS01] T. Binoth, J. P. Guillet, G. Heinrich and C. Schubert, *Calculation of 1-loop hexagon amplitudes in the Yukawa model*, Nucl. Phys. **B615**, 385–401 (2001), `hep-ph/0106243`.

[Bin04a] T. Binoth, *FORM Routines for Tensor Reduction, Personal Notes*, (2004).

[Bin04b] T. Binoth, *Übungen zu Strahlungskorrekturen in Eichtheorien*, (2004), Herbstschule für Hochenergiephysik, Maria Laach 2004.

[BK95] I. L. Buchbinder and S. M. Kuzenko, *Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity/or A Walk Through Superspace*, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 1995.

[BL94] D. Bailin and A. Love, *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory*, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 1994, Series Editor: Douglas F. Brewer; Errata unter http://www.pact.cpes.sussex.ac.uk/ mpfg9/susyerta.htm (Stand: 12.07.2005).

[BS91] I. Bronštein and K. A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttart and Leipzig, 25th edition, 1991.

[BT04] D. Binosi and L. Theussl, *JaxoDraw: A graphical user interface for drawing Feynman diagrams*, Comput. Phys. Commun. **161**, 76–86 (2004), `hep-ph/0309015`.

[CM67] S. R. Coleman and J. Mandula, *All Possible Symmetries of the S Matrix*, Phys. Rev. **159**, 1251–1256 (1967).

[Dix95] L. J. Dixon, *Strings and supersymmetry as tools for perturbative QCD*, (1995), `hep-ph/9507214`.

[Dix96] L. J. Dixon, *Calculating scattering amplitudes efficiently*, (1996), `hep-ph/9601359`.

[DKP02] P. D. Draggiotis, R. H. P. Kleiss and C. G. Papadopoulos, *Multi-jet production in hadron collisions*, Eur. Phys. J. **C24**, 447–458 (2002), `hep-ph/0202201`.

[Ell95] J. R. Ellis, *Supersymmetry and Grand Unification*, (1995), `hep-ph/9512335`.

[EM05] D. Elsaesser and K. Mannheim, *Supersymmetric dark matter and the extragalactic gamma ray background*, Phys. Rev. Lett. **94**, 171302 (2005), `astro-ph/0405235`.

[EOSS03] J. R. Ellis, K. A. Olive, Y. Santoso and V. C. Spanos, *Supersymmetric dark matter in light of WMAP*, Phys. Lett. **B565**, 176–182 (2003), `hep-ph/0303043`.

[ESW96] R. K. Ellis, W. J. Stirling and B. R. Webber, *QCD and Collider Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[FAC05] A. Freitas, M. Awramik and M. Czakon, *Indirect Determination of the Higgs Mass Through Electroweak Radiative Corrections*, (2005), `hep-ph/0507159`.

[GGRS83] J. Gates, S. James, M. T. Grisaru, M. Roček and W. Siegel, *Superspace and one thousand and one lessons in supersymmetry*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc.; Advanced Book Program, Reading, Massachusettes, 1983.

[Gre93] W. Greiner, *Feldquantisierung*, volume 7A of *Theoretische Physik*, Thun ; Frankfurt am Main : Deutsch, 1st edition, 1993.

[Group04] G. Weiglein et al. (LHC/LC Study Group Collaboration), *Physics interplay of the LHC and the ILC*, (2004), `hep-ph/0410364`.

[GW73] D. J. Gross and F. Wilczek, *Asymptotically free gauge theories. 1*, Phys. Rev. **D8**, 3633–3652 (1973).

[GW77] S. L. Glashow and S. Weinberg, *Natural Conservation Laws for Neutral Currents*, Phys. Rev. **D15**, 1958 (1977).

[Kre93] D. Kreimer, *The Role of gamma(5) in dimensional regularization*, (1993), `hep-ph/9401354`.

[Kug97] T. Kugo, *Eichtheorie*, Springer, Berlin, Heidelberg, u.a., 1997.

[Lü93] H. Lüneburg, *Vorlesungen über lineare Algebra*, B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim u.a., 1993.

[MKW87] H. J. W. Müller-Kirsten and A. Wiedemann, *Supersymmetry: An Introduction with Conceptual and Calculational Detail*, World Scientific Publishing, Singapore, 1987.

[Moh02] R. N. Mohapatra, *Unification and supersymmetry: the frontiers of quark-lepton physics*, Springer-Verlag, New York and Berlin, 3rd edition, 2002.

[Nog93] P. Nogueira, *Automatic Feynman graph generation*, J. Comput. Phys. **105**, 279–289 (1993).

[PS95] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, Boulder and Oxford, 1995.

[PT85] S. J. Parke and T. R. Taylor, *Perturbative QCD Utilizing Extended Supersymmetry*, Phys. Lett. **B157**, 81 (1985).

[PV79] G. Passarino and M. J. G. Veltman, *One Loop Corrections for e+ e- Annihilation Into mu+ mu- in the Weinberg Model*, Nucl. Phys. **B160**, 151 (1979).

[Reu02] J. Reuter, *Supersymmetry of scattering amplitudes and Green functions in perturbation theory*, (2002), `hep-th/0212154`.

[Sei93] N. Seiberg, *Naturalness versus supersymmetric nonrenormalization theorems*, Phys. Lett. **B318**, 469–475 (1993), `hep-ph/9309335`.

[Sei94] N. Seiberg, *The Power of holomorphy: Exact results in 4-D SUSY field theories*, (1994), `hep-th/9408013`.

[Sim95] I. Simonsen, *A Review of minimal supersymmetric electroweak theory*, (1995), `hep-ph/9506369`.

[tHV72] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, *Regularization and Renormalization of Gauge Fields*, Nucl. Phys. **B44**, 189–213 (1972).

[Tun85] W.-K. Tung, *Group Theory in Physics*, World Scientific Publishing, Philadelphia and Singapore, 1985.

[Vel] M. J. G. Veltman, *Reflections on the Higgs system*, CERN-97-05.

[Ver94] J. A. M. Vermaseren, *Axodraw*, Comput. Phys. Commun. **83**, 45–58 (1994).

[Ver00] J. A. M. Vermaseren, *New features of FORM*, (2000), `math-ph/0010025`.

[WB92] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and supergravity*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2nd edition, 1992.

[Wik05] WIKIPEDIA, *die freie Enzyklopädie*, Online Dictionary, Juli 2005, URL: `http://www.wikipedia.de/`.

[Wit04] E. Witten, *Perturbative gauge theory as a string theory in twistor space*, Commun. Math. Phys. **252**, 189–258 (2004), `hep-th/0312171`.

[WMAP03] D. N. Spergel et al. (WMAP Collaboration), *First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters*, Astrophys. J. Suppl. **148**, 175 (2003), `astro-ph/0302209`.

# Danksagung

Viele Mitmenschen haben zum Gelingen meiner Diplomarbeit beigetragen. Deshalb möchte ich an dieser Stelle allen danken, die mich während dieser Zeit in besonderer Weise begleitet haben und mir die Bearbeitung dieses interessanten Themas ermöglicht haben.

Ich danke meiner Freundin Stefanie, die mir für die Zeit, die ich der Wissenschaft widme, stets mehr Verständnis entgegenbringt als ich guten Gewissens erwarten darf.

Ebenfalls danke ich meinen Eltern, die mir jede Unterstützung angedeihen ließen, um mir ein Studium meiner Wahl zu ermöglichen.

Bei Herrn Prof. Dr. Reinhold Rückl möchte ich mich bedanken, dass er mir ermöglichte, an seinem Lehrstuhl zu arbeiten, aber besonders auch für den regen Einsatz in seinen Vorlesungen, die mein Interesse an der Teilchenphysik geweckt und vertieft haben.

Herr Dr. Thomas Binoth hat mich mit seiner Betreuung und Beratung von der Themenauswahl bis zur Drucklegung begleitet und hatte für meine Fragen stets ein offenes Ohr und eine hilfreiche Antwort. Dafür möchte ich mich hiermit bedanken.

Für die bereitwillige und effektive Unterstützung bei Hard- und Software-Problemen aller Art danke ich besonders Alexander Wagner und Andreas Vetter.

Für zahlreiche erhellende Diskussionen danke ich meinem Büro-Nachbarn Matthias Kaminski und meinem Studienkollegen Christian Speckner.

# Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Würzburg, den 3. August 2005

Thomas Reiter