Phänomenologische Untersuchungen nichtkommutativer Quantenfeldtheorien an Hadron-Collidern

Diplomarbeit
von
Ana Maria Alboteanu

vorgelegt bei

Prof. Dr. Reinhold Rückl

am
Institut für Theoretische Physik und Astrophysik
der
Julius-Maximilians-Universität
Würzburg

Oktober 2003

La-nceput pe când fiinţă nu era nici nefiinţă,
Pe când totul era lipsă de viaţă si voinţă,
Când nu s-ascundea nimica, deşi tot era ascuns...
Când pătruns de sine însuşi odihnea cel nepătruns.
Fu prăpastie? Genune? Fu noian întins de apă?
N-a fost lume pricepută şi nici minte s-o priceapă,
Căci era un întuneric ca o mare făr-o rază,
Dar nici de văzut nu fuse şi nici ochiu care să o vază.
Umbra celor nefăcute nu-ncepuse-a se desface,
Şi în sine împăcarea stăpânea eterna pace!...
Dar deodat-un punct se mişcă... cel întîi şi singur. Iată-l
Cum din chaos face mumă, iară el devine Tatăl...
Punctu-acela de mişcare, mult mai slab ca boaba spumii,
E stăpânul fără margini peste marginile lumii...
De-atunci negura eternă se desface în fâşii,
De atunci răsare lumea, lună, soare şi stihii...
De atunci şi până astăzi colonii de lumi pierdute
Vin din sure văi de chaos pe cărări necunoscute
Şi în roiuri luminoase izvorând din infinit,
Sunt atrase în viaţă de un dor nemărginit.

M. Eminescu, „Scrisoarea I“, 1881

To the very first, when being and non-being were nought still,
When there was but utter absence of both life-impulse and will,
When unopen there was nothing, although everything was hidden,'
When, by His own self pervaded, resting lay the Allforbidden.
Was it an abyss? a chasm? wat'ry plains without an end?
There was no estate of wisdom, nor a mind to comprehend.
For the darkness was as solid as is still the shadows' ocean,
And no eyes, had there been any, could have formed of it a notion.
Of the unmade things the shadows had not yet begun to gleam
And, with its own self-contented, peace eternal reigned supreme.
Suddenly, a dot starts moving - the primeval, lonely Other...
It becomes the father potent, of the void it makes the mother.
Weaker than a drop of water, this small dot that moves and bounds
Is the unrestricted ruler of the world's unbounded bounds.
Ever since the vasty dimness has been splitting slice by slice,
Ever since come into being earth, sun, moon, light, heat, and ice.
Ever since up to the present gallaxies of planets lost
Follow up mysterious courses, chaos-bred and chaos-tossed,
And in endlessness begotten, endless swarms of light are thronging
Towards life, for ever driven by an infinite of longing.

M. Eminescu, „First Epistol“, 1881

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Eine der Herausforderungen, die die Quantenmechanik zu Beginn des 20. Jahrhunderts an die menschliche Vorstellungskraft stellte, war die Tatsache, dass sich bei kleinen Längen und großen Energien zwei physikalische Größen, wie z. B. der Ort und der Impuls eines Teilchens, nicht mehr gleichzeitig exakt bestimmen lassen, was gleichbedeutend mit der Nichtvertauschbarkeit der diesen messbaren Größen zugeordneten Operatoren ist. Mathematisch wird dieser Sachverhalt durch den nichtverschwindenden Kommutator der beiden Operatoren beschrieben.

Unsere Wahrnehmung der Raumzeit als eine kommutative Raumzeit ist auf Energien- und Längenskalen beschränkt, die weit von den Skalen, bei denen quantenmechanische Effekte auftreten, entfernt sind. Es gibt also a priori keinen Grund, die Nichtkommutativität der Raumzeit-Koordinaten ab einer gewissen Energieskala (welche dann experimentell bestimmt werden muss) zu verbieten.

Sogenannte „nichtkommutative Quantenfeldtheorien“ (NCQFT), welche auf einer Raumzeit definiert sind, deren Koordinaten nicht mehr vertauschen, können entwickelt und die experimentell messbaren Konsequenzen daraus berechnet werden. Eine Nichtvertauschbarkeit der Raumzeitkoordinaten führt, ähnlich wie in der Quantenmechanik, zu einer Unschärferelation zwischen diesen, so dass man nun statt einem Raumzeitpunkt eine „verschmierte“ Raumzeit erhält. Man hat somit eine kleinste Länge in Raum und Zeit eingeführt. Diese Tatsache gab historisch den Anlass zur Untersuchung von Feldtheorien auf einer nichtkommutativen Raumzeit.

Schon in den 30er Jahren schlug Heisenberg vor, das Raumzeit-Kontinuum durch eine Gitterstruktur zu ersetzen, um somit in der Quantenelektrodynamik (QED) auftretende Divergenzen zu bewältigen. Eine solche Struktur bricht jedoch die Lorentzinvarianz. Snyder erkannte 1947 [1], dass das Einführen einer kleinsten Länge in der Raumzeit, ebenfalls in der Hoffnung, dadurch Divergenzen in Materie-Feld-Wechselwirkungen zu beseitigen, einen nichtverschwindenden Kommutator der Raumzeit-Koordinaten erzwingt. Dabei wurde gleichzeitig die Lorentzinvarianz gewahrt, aber die Translationsinvarianz verletzt. Da zeitgleich die Renormierungstheorie als eine zufriedenstellende Lösung für die Handhabung von Divergenzen entwickelt wurde, wurde die Idee einer nichtkommutierenden Raumzeit als Antwort auf dieses Problem fallengelassen.

Auch auf dem Gebiet der Mathematik wurde der Begriff einer nichtkommutativen (NC) Geometrie eingeführt, in welcher die kommutative Algebra von Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit durch eine nichtkommutative Algebra ersetzt wird. Die Anwendung der NC-Geometrie in der Physik ließ die Hoffnung zur Beschreibung der Quantengravitation zu, was ein bis heute ungelöstes Problem darstellt. Denn obwohl im Laufe der letzten 30 Jahre das Standardmodell der Elementarteilchenphysik zur derzeit grundlegendsten Theorie des Aufbaus der Materie heranreifte und dessen Vorhersagen experimentell erstaunlich gut bestätigt wurden, lässt es viele Fragen unbeantwortet. Eine der bedeutendsten davon ist diejenige nach der Vereinheitlichung der vier fundamentalen Wechselwirkungen. Die Superstringtheorie liefert den zur Zeit aussichtsreichsten Ansatz für die Beschreibung der Gravitation innnerhalb einer Theorie, die gleichzeitig die elektroschwache und die starke Wechselwirkung beinhaltet. Es konnte gezeigt werden [2], dass eine nichtkommutative Geometrie auf eine natürliche Art und Weise in die Stringtheorie eingeht. Seiberg und Witten zeigten 1999, dass die effektive Physik auf D-Branes sich sowohl durch nichtkommutative $U(1)$-Yang-Mills-Eichtheorien als auch durch gewöhnliche, auf der kommutativen Raumzeit definierten $U(1)$-Eichtheorien beschreiben lässt, was zu einer Abbildung (der sogenannten Seiberg-Witten-Map) zwischen den nichtkommutativen und den gewöhnlichen Feldern führt [3].
Abgesehen von der Motivation, die durch die Verknüpfung mit der Stringtheorie gegeben wird, bieten Quantenfeldtheorien auf einer nichtkommutativen Raumzeit die Möglichkeit zur Untersuchung von nichtlokalen Eichtheorien. Wie im ersten Teil dieser Arbeit gezeigt wird, können Feldtheorien auf einer nichtkommutativen Raumzeit als Feldtheorien auf der gewöhnlichen, kommutativen Raumzeit mit einem neuen Produkt formuliert werden, wobei die Nichtkommutativität in dem neu eingeführten Produkt enthalten ist. Die Beschaffenheit dieses Produktes führt zum Verlust der Lokalität der Theorie.

Ob die Raumzeit tatsächlich nichtkommutativ ist, können nur zukünftige Experimente zeigen. Es müssen daher im Rahmen einer NCQFT Prozesse untersucht werden, die eine Abhängigkeit von nichtkommutativen Parametern (vor allem der Energieskala, bei der NC-Effekte auftreten) aufweisen. Die Einführung von nichtkommutativen Koordinaten hat eine im Vergleich zum Standardmodell (SM) veränderte Lagrangedichte zur Folge. Neue Feynman-Regeln müssen hergeleitet werden, mit denen dann anschließend Observablen für Beschleuniger-Prozesse berechnet werden können. In diesem Sinne wird in der vorliegenden Arbeit der Prozess $p\bar{p} \to Z\gamma$ auf nichtkommutative Effekte hin untersucht.
Im ersten Teil der Arbeit wird gezeigt, wie Quantenfeldtheorien auf einer nichtkommutativen Raumzeit beschrieben werden können. Es werden einige Ansätze für nichtkommutative Eichtheorien, sowie die Probleme, die sich hieraus ergeben, vorgestellt (Kap. 2). In Kapitel 3 wird auf ein Modell für eine nichtkommutative Erweiterung des Standardmodells eingegangen, das auf die oben erwähnten Seiberg-Witten-Abbildungen aufbaut und einige dieser Probleme zu lösen vermag. Die Lagrangedichte im Rahmen dieses nichtkommutativen Standardmodells (NCSMs) ist bereits in erster Ordnung des Parameters, der die Skala der Nichtkommutativität beschreibt, in der Literatur vorhanden, nicht jedoch

die Feynman-Regeln. Die für den Prozess $p\bar{p} \to Z\gamma$ relevanten Feynman-Regeln müssen also zuerst hergeleitet werden (Kap. 4), bevor in Kapitel 5 und 6 die Berechnung der Observablen zunächst für den partonischen Prozess $q\bar{q} \to Z\gamma$ und im Anschluss daran für den hadronischen Prozess $p\bar{p} \to Z\gamma$ vorgeführt wird. Dabei wird in Kapitel 5 die Gültigkeit der Ward-Identität für den hier betrachteten nichtkommutativen Prozess bewiesen und in Kapitel 6 eine kurze Einführung in das Partonmodell gegeben. Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit werden jeweils in Kapitel 5 und 6 diskutiert.

Es muss von vornherein noch eine Bemerkung zur Ausdrucksweise gemacht werden, um Zweideutigkeiten zu vermeiden. Im Folgenden werden „gewöhnliche“ Theorien auf der kommutativen Raumzeit mit „kommutativen“ Theorien bezeichnet, während Theorien, die auf einer nichtkommutativen Raumzeit definiert sind, mit „nichtkommutativen“ Theorien bezeichnet werden. An dieser Stelle soll unterstrichen werden, dass sich die Begriffe „kommutativ“ und „abelsch“, bzw. „nichtkommutativ“ und „nichtabelsch“ auf zwei verschiedene Aspekte der Theorie beziehen: während sich abelsch/nichtabelsch auf die Lie-Algebra-Struktur bezieht, meint man mit kommutativ/nichtkommutativ die Raumzeit, auf der die Theorie definiert wird.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel wird eine allgemeine Einführung in die nichtkommutative Quantenfeldtheorie (NCQFT) gegeben. Nachdem eine solche definiert und deren Realisierung auf einer kommutativen Raumzeit vorgeführt wurde, werden kurz einige Ansätze zur Beschreibung nichtkommutativer Theorien und dabei auftretende Schwierigkeiten vorgestellt, bevor in Kapitel 3 auf das dieser Arbeit zugrundeliegende Modell ausführlicher eingegangen wird.

Man definiert eine nichtkommutative Struktur der Raumzeit, indem man die üblichen kommutativen Raumzeit-Koordinaten x^μ durch nichtkommutative Operatoren $\hat{x}^\mu$ ersetzt:

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = \hat{x}^\mu \hat{x}^\nu - \hat{x}^\nu \hat{x}^\mu \neq 0. \tag{2.1}$$

Eine Möglichkeit die dadurch beschriebene Raumzeit zu betrachten ist, sie mit den möglichen Messwerten für Ortskoordinaten, die durch das Eigenwertspektrum der Operatoren $\hat{x}^\mu$ gegeben sind, zu identifizieren. Ist das Eigenwertspektrum diskret, so ist aus dieser Perspektive auch die Raumzeit diskret. Kommutative Koordinaten induzieren ein kontinuierliches Eigenwertspektrum, also eine kontinuierliche Raumzeit. Die Raumzeit, so wie sie sich uns bei den heutigen experimentellen Möglichkeiten erschließt, ist offensichtlich kontinuierlich. Falls es eine nichtkommutative (möglicherweise diskrete) Raumzeit gibt, muss es eine Skala geben, ab welcher nichtkommutative Effekte auftreten und die, wie gleich gezeigt wird, in die Definition der Kommutatorrelation (2.1) eingeht.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Kommutatorrelation (2.1) zu definieren, wovon die drei wichtigsten erwähnt werden sollen: konstant, linear oder quadratisch in den $\hat{x}^\mu$. Man erhält somit eine sogenannte kanonische Struktur:

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = \mathrm{i}\theta^{\mu\nu}, \tag{2.2}$$

mit einer konstanten, reellen und antisymmetrischen Matrix $\theta^{\mu\nu}$ ($\theta^{\mu\nu} = -\theta^{\nu\mu}$). Die Lie-Algebra-Struktur wird durch

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = \mathrm{i} f^{\mu\nu}_{\sigma} \hat{x}^\sigma \tag{2.3}$$

gegeben, mit den Strukturkonstanten $f^{\mu\nu}_{\sigma}$. Schließlich definiert die in den $\hat{x}^\mu$ quadratische Relation

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = \mathrm{i}q^{-1} R^{\mu\nu}_{\rho\sigma} \hat{x}^\rho \hat{x}^\sigma \tag{2.4}$$

eine Quantengruppen-Struktur. In dieser Arbeit wird nur der kanonische Fall (2.2) mit der konstanten Matrix $\theta^{\mu\nu}$ betrachtet. Es gibt jedoch a priori keinen Grund für die Annahme eines raumzeitunabhängigen NC-Parameters. Man kann die in [4] entwickelte Theorie für ein konstantes $\theta^{\mu\nu}$, auf der die vorliegende Arbeit basiert, auch auf Theorien mit einem langsam variierenden raumzeitabhängigen $\theta^{\mu\nu}(x)$ übertragen [5].
Eine NC-Skala kann durch die Wahl dimensionsloser Matrixelemente $C^{\mu\nu}$ der Größenordnung Eins definiert werden:

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{1}{\Lambda^2_{NC}} C^{\mu\nu}, \tag{2.5}$$

mit dem dimensionsbehafteten ([Energie]) Parameter der Nichtkommutativität Λ_{NC}. Für die NCQED-Energieskala liegen die ersten, durch Collider-Experimente gegebenen Einschränkungen bei $\Lambda_{NC} > 141\,\mathrm{GeV}$, wie die OPAL-Kollaboration in [6] zeigte. In der Literatur werden weitere Schranken für Λ_{NC}, direkter und indirekter Natur (z. B. aus der Kosmologie), genannt: einige TeV [7,8] auf der einen Seite und von der Größenordnung 10^{11} GeV [9] oder noch größer [10] auf der anderen Seite.
Man kann sich $\theta^{\mu\nu}$ als ein Hintergrundfeld vorstellen, welches bestimmte Richtungen in der Raumzeit auszeichnet. Das heisst, dass bei sehr großen Energien, bzw. bei sehr kleinen Abständen, die Lorentzsymmetrie explizit verletzt, dass sie aber im Grenzfall $\theta \to 0$ wieder hergestellt wird.

Es stellt sich nun die Frage nach einer Möglichkeit, die Kommutatorbeziehung (2.2) der nichtkommutierenden Größen $\hat{x}^\mu$ mit Hilfe von kommutierenden Koordinaten x^μ und einem deformierten Produkt zu realisieren [11, 12]. Gesucht ist demnach ein Homomorphismus zwischen der nichtkommutativen Algebra $(\hat{\mathcal{A}}, \cdot)$ von Funktionen auf einer nichtkommutativen Raumzeit und der kommutativen Algebra $(\mathcal{A}, \star)$ von Funktionen auf der gewöhnlichen Raumzeit, so dass die beiden Algebren zueinander homomorph sind:

$$(\hat{\mathcal{A}}, \cdot) \cong (\mathcal{A}, \star)\,. \tag{2.6}$$

Die assoziative Algebra $\hat{\mathcal{A}}$, welche die nichtkommutative Raumzeit definiert, wird durch die von den Operatoren $\hat{x}^\mu$ frei erzeugte Algebra $\mathbb{C}\left[\left[\hat{x}^0, \ldots, \hat{x}^{n-1}\right]\right]$ modulo den Beziehungen (2.2-2.4) gegeben:

$$\hat{\mathcal{A}} = \frac{\mathbb{C}\left[\left[\hat{x}^0, \ldots, \hat{x}^{n-1}\right]\right]}{\mathfrak{I}}\,. \tag{2.7}$$

Dabei bezeichnet $\mathfrak{I}$ das Ideal, das von den Kommutatoren (2.2)-(2.4) erzeugt wird. Unter dem Ideal einer Algebra versteht man eine Unteralgebra, deren Elemente multipliziert mit einem Element der Algebra ein Element aus dem Ideal ergeben. Verwendet man die Abkürzung

$$K = [\hat{x}^\mu \overset{\star}{,} \hat{x}^\nu] - \mathrm{i}\theta^{\mu\nu} \tag{2.8}$$

für die kanonische Relation (2.2), so haben die Elemente des Ideals $\mathcal{I}$ folgende Struktur:

$$K,\ K\hat{x},\ \hat{x}K,\ \hat{x}^2K,\ \hat{x}K\hat{x},\ \ldots\ \in \mathcal{I}.$$

Die Elemente der Faktoralgebra $\hat{\mathcal{A}}$ sind von der Form

$$\hat{\mathcal{A}} = \{\, \hat{x}^\rho + \mathcal{I} \mid \hat{x}^\rho \in \mathbb{C}[[\hat{x}^0, \ldots, \hat{x}^{n-1}]]\,\}\,, \tag{2.9}$$

mit der daraus folgenden Multiplikationsvorschrift zweier Elemente aus $\hat{\mathcal{A}}$:

$$(\hat{x}^\rho + \mathcal{I})(\hat{x}^\sigma + \mathcal{I}) = \hat{x}^\rho\hat{x}^\sigma + \underbrace{\hat{x}^\rho\mathcal{I} + \mathcal{I}\hat{x}^\sigma}_{\in\,\mathcal{I}} + \mathcal{I} = \hat{x}^\rho\hat{x}^\sigma + \mathcal{I} \tag{2.10}$$

Alle Elemente aus $\hat{\mathcal{A}}$, die sich lediglich durch Relationen der Form $[\hat{x}^\mu \stackrel{\star}{,} \hat{x}^\nu] - \mathrm{i}\theta^{\mu\nu}$ unterscheiden, sind gleich. Die Algebra $\mathcal{A}$ auf dem kommmutativen Raum wird von den Koordinaten x^μ erzeugt:

$$\mathcal{A} = \frac{\mathbb{C}\,[\,[x^0, \ldots, x^{n-1}]\,]}{[x^\mu, x^\nu]} = \mathbb{C}\,[\,[x^0, \ldots, x^{n-1}]\,]\,, \tag{2.11}$$

mit $[x^\mu, x^\nu] = 0$. Um einen Algebren-Homomorphismus $W : \mathcal{A} \to \hat{\mathcal{A}}$ konstruieren zu können, muss ein neues $\star$-Produkt in $\mathcal{A}$ mit folgender Eigenschaft eingeführt werden:

$$W(f \star g) = W(f) \cdot W(g) = \hat{f} \cdot \hat{g}, \tag{2.12}$$

mit $f, g \in \mathcal{A}$ und $\hat{f}, \hat{g} \in \hat{\mathcal{A}}$. Dieser Sachverhalt kann durch folgendes Diagramm beschrieben werden:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \xrightarrow{\ \star\ } & \mathcal{A} \\ {\scriptstyle W\times W}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle W} \\ \hat{\mathcal{A}} \times \hat{\mathcal{A}} & \xrightarrow{\ \cdot\ } & \hat{\mathcal{A}} \end{array} \tag{2.13}$$

Gleichung (2.12) ist dann äquivalent zur Aussage, dass das Diagramm (2.13) kommutativ ist, d. h. dass die beiden Wege, um von $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ nach $\hat{\mathcal{A}}$ zu gelangen, zum gleichen Resultat führen.

Durch die Abbildung W wird die Nichtkommutativität aus der Definition der Operatoren $\hat{x}^\mu$ aus $\hat{\mathcal{A}}$ auf das Produkt $\star$ von Funktionen von Koordinaten x^μ aus $\mathcal{A}$ übertragen. Im Folgenden wird nun eine mögliche Realisierung des $\star$-Produktes vorgeführt, basierend auf der Methode der Weyl-Quantisierung.

Im Rahmen der Weyl-Quantisierung wird eine Vorschrift für die Zuordnung eines Operators einer Funktion von kanonischen Variablen gegeben [13]. Diesem Formalismus folgend kann einer Funktion $f(x^0, \ldots, x^{n-1}) \equiv f(x)$ aus $\mathcal{A}$ ein Element aus $\hat{\mathcal{A}}$ folgendermaßen zugeordnet werden:

$$W(f) = \hat{f} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \mathrm{d}^n k\, e^{\mathrm{i}k_\nu \hat{x}^\nu}\, \tilde{f}(k), \tag{2.14}$$

mit der Fouriertransformierten von $f(x)$:

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \mathrm{d}^n x\, e^{-\mathrm{i}k_\nu x^\nu} f(x). \tag{2.15}$$

Auf diese Weise werden in der Funktion f die kommutativen Koordinaten x^μ durch die nichtkommutativen Operatoren $\hat{x}^\mu$ ersetzt. Damit erhält man:

$$W(f \star g) = W(f)W(g) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \mathrm{d}^n k\, \mathrm{d}^n p\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\mu \hat{x}^\mu} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_\nu \hat{x}^\nu} \tilde{f}(k)\tilde{g}(p). \tag{2.16}$$

Da es sich in der Exponentialfunktion um nichtkommutierende Operatoren handelt, muss die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel angewendet werden:

$$\mathrm{e}^{\widehat{A}}\mathrm{e}^{\widehat{B}} = \mathrm{e}^{\widehat{A}+\widehat{B}+\frac{1}{2}[\widehat{A},\widehat{B}]+\frac{1}{12}\left([\widehat{A},[\widehat{A},\widehat{B}]]+[[\widehat{A},\widehat{B}],\widehat{B}]\right)+\ldots} \tag{2.17}$$

Im Fall der kanonischen Struktur (2.2) ist der Kommutator $[\theta^{ij}, \hat{x}^l] = 0$, folglich entfallen in (2.17) alle Terme, die mehr als einen Kommutator enthalten und man gewinnt für die Exponentialfunktion in (2.16) folgenden Ausdruck:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\mu \hat{x}^\mu} e^{\mathrm{i}p_\nu \hat{x}^\nu} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_\nu + p_\nu)\hat{x}^\nu - \frac{\mathrm{i}}{2}k_\mu p_\nu \theta^{\mu\nu}}. \tag{2.18}$$

Man erhält das Produkt $f \star g$, indem man diese Beziehung in (2.16) einsetzt und gemäß (2.14) den Operator $\hat{x}^\mu$ durch die Koordinate x^μ ersetzt:

$$(f \star g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \mathrm{d}^n k\, \mathrm{d}^n p\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_\nu + p_\nu)x^\nu - \frac{\mathrm{i}}{2}k_\mu \theta^{\mu\nu} p_\nu} \tilde{f}(k)\tilde{g}(p). \tag{2.19}$$

Damit erhält man das Moyal-Weyl-Sternprodukt [14]:

$$(f \star g)(x) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial y^\nu}\right) f(x)g(y)\bigg|_{y \to x}. \tag{2.20}$$

Mit dieser Vorschrift für das Sternprodukt $\star$ und $\theta^{\mu\nu} = -\theta^{\nu\mu}$ kann man nun den Kommutator $[x^\mu \overset{\star}{,} x^\nu]$ berechnen:

$$[x^\mu \overset{\star}{,} x^\nu] = x^\mu \star x^\nu - x^\nu \star x^\mu = x^\mu x^\nu + \frac{\mathrm{i}}{2}\theta^{\mu\nu} - x^\nu x^\mu - \frac{\mathrm{i}}{2}\theta^{\nu\mu} = \mathrm{i}\theta^{\mu\nu}, \tag{2.21}$$

welcher genau den Kommutator (2.2) wiedergibt:

$$[x^\mu \overset{\star}{,} x^\nu] = [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = \mathrm{i}\theta^{\mu\nu}. \tag{2.22}$$

Anhand dieser Gleichung wird deutlich, wie die Nichtkommutativität, definiert durch die nichtkommutierenden Operatoren $\hat{x}^\mu$, mit Hilfe der üblichen kommutierenden Koordinaten und des Sternprodukts (2.20) realisiert wird.

Folgende Eigenschaft des Integrals eines Sternprodukts zweier hinreichend schnell abfallender Funktionen sei noch erwähnt:

$$\int \mathrm{d}^n x\, (f \star g)(x) = \int \mathrm{d}^n x\, (g \star f)(x) = \int \mathrm{d}^n x\, f(x)g(x), \tag{2.23}$$

wie durch partielle Integration für jede Ordnung in θ und Ausnutzung der Antisymmetrie der θ-Matrix gezeigt werden kann. Es muss jedoch betont werden, dass das Integral des Sternprodukts dreier oder mehrerer Funktionen nicht mehr gleich dem Integral des normalen Produkts dieser Funktionen ist. Nur *eines* der

Sternprodukte darf – mittels partieller Integration – durch das normale Punktprodukt ersetzt werden:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^n x \, (f \star g \star h)(x) &= \int \mathrm{d}^n x \, ((f \star g) \cdot h)(x) = \\ &= \int \mathrm{d}^n x \, (f \cdot (g \star h))(x) \neq \int \mathrm{d}^n x \, f(x) g(x) h(x) \, . \end{aligned} \tag{2.24}$$

Außerdem ist das Integral (2.24) invariant unter zyklischer Vertauschung der Funktionen:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^n x \, (f \star g \star h)(x) &= \int \mathrm{d}^n x \, ((f \star g) \cdot h)(x) = \\ &= \int \mathrm{d}^n x \, (h \cdot (f \star g))(x) = \int \mathrm{d}^n x \, (h \star f \star g)(x) \, . \end{aligned} \tag{2.25}$$

Durch die Einführung des Sternprodukts (2.20) ist es nun möglich, eine nichtkommutative Erweiterung der kommutativen Feldtheorie zu formulieren: Die Nichtkommutativität in den Feldern, welche Elemente der NC-Algebra $(\hat{\mathcal{A}}, \cdot)$ sind, wird durch die oben beschriebene Vorschrift auf das Sternprodukt zwischen den gewöhnlichen Feldern, welche der Algebra $(\mathcal{A}, \star)$ angehören, übertragen. Folglich erhält man eine nichtkommutative Version der Wirkung, indem man alle Produkte zwischen den Feldern durch das Moyal-Weyl-Sternprodukt (2.20) ersetzt. Einige Konsequenzen dieser Ersetzung sollen im Folgenden kurz angesprochen werden. Zunächst soll auf die nichtkommutative Erweiterung einer abelschen Theorie eingegangen werden, da schon in diesem Fall einige grundlegende Probleme auftreten.

Betrachtet man die Lagrangedichte der QED im kommutativen Fall

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}} = \bar{\Psi}(\mathrm{i}\not{D} - m)\Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \, , \tag{2.26}$$

mit der kovarianten Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i} e A_\mu \, , \tag{2.27}$$

und dem Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \, , \tag{2.28}$$

so ist diese invariant unter den lokalen Eichtransformationen

$$\Psi \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x)} \Psi \tag{2.29a}$$

$$\bar{\Psi} \to \bar{\Psi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x)} \tag{2.29b}$$

$$A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \lambda(x) \, , \tag{2.29c}$$

mit dem raumzeitabhängigen Eichparameter $\lambda(x)$. Geht man zu der nichtkommutativen Formulierung der QED (NCQED) über, so wird die Lagrangedichte gemäß der Ersetzungvorschrift $\cdot \to \star$ zu

$$\mathcal{L}_{\mathrm{NCQED}} = \bar{\Psi} \star (\mathrm{i}\not{D}) \star \Psi - m \bar{\Psi} \star \Psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} \star F_{\mu\nu} \, , \tag{2.30}$$

wobei der nichtkommutative Feldstärketensor durch

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{\mathrm{i}e}[D_\mu \stackrel{\star}{,} D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \mathrm{i}e[A_\mu \stackrel{\star}{,} A_\nu] \tag{2.31}$$

gegeben ist, da die Lagrangedichte (2.26) nun unter folgenden (infinitesimalen) Eichtransformationen invariant sein muss:

$$\Psi \to \Psi + \mathrm{i}\lambda(x) \star \Psi \tag{2.32a}$$

$$\bar{\Psi} \to \bar{\Psi} - \mathrm{i}\bar{\Psi} \star \lambda(x) \tag{2.32b}$$

$$A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \lambda(x) + \mathrm{i}[\lambda(x) \stackrel{\star}{,} A_\mu] \tag{2.32c}$$

$$F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu} + \mathrm{i}[\lambda(x) \stackrel{\star}{,} F_{\mu\nu}] \tag{2.32d}$$

Ohne weiter auf die konkrete Form der NC-Lagrangedichte einzugehen, kann man aus (2.30)-(2.32) einige Eigenschaften ablesen, die sich aufgrund des Übergangs vom normalen Punkt- zum Sternprodukt ergeben und auf die als Nächstes eingegangen werden soll.
Da sich die Wirkung aus der Integration der Lagrangedichte über den gesamten Raum ergibt, $S = \int \mathcal{L} \mathrm{d}^4x$, bleiben wegen der Integraleigenschaft (2.23) des Sternprodukts Terme, die bilinear in den Feldern sind, nach der Ersetzung $\cdot \to \star$ unverändert. Das bedeutet, dass der Übergang von einer kommutativen zu einer nichtkommutativen Raumzeit die Propagatoren und die Massenterme unverändert lässt. Anders verhält es sich im Fall der Wechselwirkungsterme. Betrachtet man das Sternprodukt (2.20) im Impulsraum

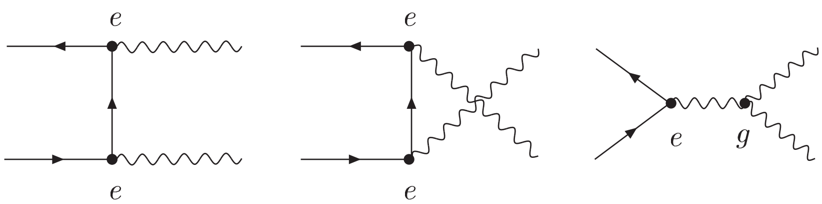
$$(f \star g)(x) \to f(p)g(k)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}p_\mu \theta^{\mu\nu} k_\nu}\,, \tag{2.33}$$

so ist daraus und aus (2.30) ersichtlich, dass die Kopplungen zusätzliche impulsabhängige Phasenfaktoren erhalten. Die Lagrangedichte (2.30) enthält außerdem, aufgrund der nichtlinearen Terme im Ausdruck der NC-Feldstärke (2.31), zusätzlich kubische und biquadratische Terme in den Eichfeldern. Das bedeutet, dass Selbstkopplungen zwischen Eichbosonen möglich sind.
Die Kommutatoren in den Ausdrücken (2.31), (2.32c) und (2.32d) deuten auf einen nicht-abelschen Charakter hin. Die Nichtvertauschbarkeit der Eichparameter und -felder geschieht aufgrund des Sternprodukts, so dass die nichtkommutative Erweiterung einer abelschen Theorie nicht mehr abelsch sein wird.
Handelt es sich schon im kommutativen Fall um eine nichtabelsche Theorie, so gibt es in deren NC-Version zwei Quellen für die Nichtvertauschbarkeit der Felder und Eichparameter: die Lie-Algebra-Struktur der Generatoren auf der einen Seite und das Sternprodukt auf der anderen Seite. Das führt zu Schwierigkeiten, wenn man versucht, $SU(N)$-Theorien in der nichtkommutativen Raumzeit einzubetten. Denn der Versuch, in der oben vorgeführten Art und Weise $SU(N)$-Eichtheorien nichtkommutativ zu formulieren, scheitert an der Tatsache, dass Kommutatoren nicht mehr in der entsprechenden Lie-Algebra schließen. Betrachtet man beispielsweise eine infinitesimale Transformation des Eichfeldes A_μ mit dem Eichparameter λ

$$
\begin{aligned}
\delta_\lambda A_\mu &= \partial_\mu \lambda + i\lambda \star A_\mu - iA_\mu \star \lambda \\
&= T^a(\partial_\mu \lambda_a) + \frac{i}{2}[T^a, T^b]\{\lambda_a \stackrel{\star}{,} A_{b\mu}\} + \frac{i}{2}\{T^a, T^b\}[\lambda_a \stackrel{\star}{,} A_{b\mu}] , \qquad (2.34)
\end{aligned}
$$

so schließt diese nicht mehr in der Eichgruppe. Der Koeffizient vor dem Antikommutator $\{T^a, T^b\}$ ist jetzt verschieden von Null, folglich muss der Antikommutator der Generatoren auch ein Generator sein. Dieses ist jedoch nur für $U(N)$-Eichgruppen erfüllt, so dass anscheinend nur $U(N)$-Theorien mit einer nichtkommutativen Geometrie vereinbar sind.
Wie ist dann eine nichtkommutative Erweiterung des Standardmodells mit der Eichgruppe $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ zu realisieren? In [15] wurde vorgeschlagen, die erweiterte Eichgruppe $U(3) \times U(2) \times U(1)$ zu betrachten. Die überzähligen Symmetrien werden anschließend via Higgsmechanismus durch die Einführung neuer skalarer Felder (den sogenannten Higgsac's) in einer geeigneten Darstellung reduziert. Außerdem lässt dieses Modell fraktionale Ladungen zu, im Gegensatz zu der NCQED, wo gezeigt werden konnte [16], dass die Ladung von an U(1)-Eichfelder gekoppelten Materiefeldern auf die Werte $0, \pm 1$ beschränkt ist.

Dieses NCQED-Ladungsproblem kann anhand eines Beispiels verdeutlicht werden: Betrachtet man die Paarvernichtung geladener Fermionen in zwei Photonen



,

so fordert die Ward-Identität (auf welche in Kapitel 5.2 ausführlicher eingegangen wird)

$$
\frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle 0 | \mathrm{T} A^\mu(x) \Phi_1(x_1) \Phi_2(x_2) \cdots \Phi_n(x_n) | 0 \rangle_{\text{amputiert, on-shell}} = 0 \qquad (2.35)
$$

die Gleichheit zwischen Fermion-Photon- und Drei-Photon-Kopplung: $g \stackrel{!}{=} e$. Das ist jedoch unmöglich, da einerseits ganzzahlige Leptonen, andererseits drittelzahlige Quarks an das Photonfeld koppeln müssen. Da auf die Gültigkeit der Ward-Identität auf keinen Fall verzichtet werden darf, muss eine Möglichkeit zur Lösung dieses Widerspruchs gefunden werden.

Im nächsten Kapitel wird gezeigt, wie die dieser Arbeit zugrundeliegende Formulierung eines nichtkommutativen Standardmodells die oben angesprochenen Probleme löst [4, 17]. Es sei schon an dieser Stelle erwähnt, dass dieses durch die Einführung sogenannter Seiberg-Witten-Abbildungen (Seiberg-Witten-Maps, SWMs) geschieht, welche nichtkommutative Eichfelder und -parameter durch die entsprechenden kommutativen Größen ausdrücken. Da die SWMs jedoch nicht eindeutig festgelegt sind, können die Freiheiten z. B. dafür ausgenutzt werden, formal für jede Ladung ein eigenes Photonfeld einzuführen.

Durch die SWMs können dann die unterschiedlichen Photonfelder wieder auf das Photonfeld des SMs abgebildet werden.

Bevor ausführlicher auf diese Theorie eingegangen werden soll, sei jedoch noch eine weitere Schwierigkeit, die sich durch die Einführung des Sternproduktes (2.20) ergibt, kurz erwähnt:
Ein Problem wird durch den nichtlokalen Charakter der Theorie verursacht, den sie durch die Ersetzung $\cdot \to \star$ erhält. Das Moyal-Weyl-Sternprodukt (2.20) induziert eine inhärente Nichtlokalität in der Wirkung durch Terme, die nunmehr eine unendliche Anzahl von Ableitungen in den Felder enthalten. Während raumartige Nichtkommutativität, d. h. $\theta^{0i} = 0$, die Unitarität nicht verletzt, führen die unendlich hohen Zeitableitungen für zeitartige Nichtkommutativität dazu, dass keine unitäre Theorie mehr formuliert werden kann. Die Ursache dieses Problems liegt darin, dass man bei der Herleitung der Feynman-Regeln keinen kausalen Feynman-Propagator aus den Lösungen positiver und negativer Frequenz zusammensetzen kann, da die Zeitordnungsvorschrift nicht mit dem Sternprodukt kommutiert, wenn Raum und Zeit nicht kommutieren. In [18] wurde eine dieses Problem berücksichtigende Vorgehensweise zur Herleitung von Feynman-Regeln vorgestellt, welche für skalare Felder und Prozesse ohne externe Eichbosonen das Unitaritätsproblem der zeitartigen NCQFT löst. In [19] konnte jedoch gezeigt werden, dass die Ward-Identität für Prozesse, die externe Eichbosonon einbeziehen, verletzt wird, und somit die in [18] vorgestellte „zeitgeordnete Störungstheorie“ (Time-Ordered Perturbation Theory) die Unitaritätsschwierigkeiten nicht behebt.

Wie schon angedeutet wurde, wird im folgenden Kapitel ein Modell vorgestellt, das einen Teil der erwähnten Probleme zu lösen vermag. Eine Diskussion des Unitaritätsproblems im Rahmen dieses Modells ist verfrüht, da das betrachtete Modell nur Terme erster Ordnung in θ berücksichtigt und es demnach zu keiner Verletzung der Unitarität durch die Nichtlokalität kommen kann. Erst wenn alle Ordnungen in θ beachtet werden, ist die Frage nach der Unitarität der Theorie sinnvoll.

Kapitel 3

Seiberg-Witten-Abbildungen

In Kapitel 2 wurde auf einige Probleme einer NCQFT hingewiesen, die sich durch die Ersetzungsvorschrift $\cdot \to \star$ in der Lagrangedichte und in den entsprechenden Eichtransformationen, unter denen sie weiterhin invariant bleibt, ergeben, und gezeigt, dass dieser „naive“ Ansatz keine zufriedenstellende Herangehensweise zur Beschreibung des $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$-SMs liefern kann. Es soll in diesem Kapitel auf die in [4] vorgestellte Version eines nichtkommutativen Standardmodells (NCSM) eingegangen werden. Diesem Modell gelingt es, die gesamte Eichgruppe $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ nichtkommutativ zu beschreiben, indem die Lie-Algebra durch deren universelle einhüllende Algebra ersetzt wird und die sogenannten Seiberg-Witten-Abbildungen (SWMs) eingeführt werden. Die unendlich vielen Freiheitsgrade der Eichparameter, die aus der Einbettung in die unendlichdimensionale einhüllende Algebra resultieren, werden durch die SWMs auf die richtige Anzahl der im kommutativen SM vorkommenden Größen reduziert.

Dieses Kapitel bietet einen Überblick über die Vorgehensweise zur Beschreibung des NCSMs, so wie sie in [4] vorgeführt wird. Die Herleitung der Seiberg-Witten-Abbildungen wird ausführlich behandelt, da diese einen der Hauptpfeiler darstellen, auf die sich die Konstruktion eines NCSMs, das zur Zeit einen der meistverprechendsten Ansätze zur Beschreibung einer nichtkommutativen QFT liefert, stützt. Die SWMs werden hier nur bis zur ersten Ordnung in der Matrix $\theta^{\mu\nu}$ angegeben; die Herangehensweise bietet jedoch die Möglichkeit, die SWMs in zweiter oder höherer Ordnung θ zu erweitern. Dieses Kapitel führt schließlich auf die NC-Lagrangedichte, die zur Herleitung der für den hier betrachteten Prozess notwendigen Feynman-Regeln nötig ist und deren Bestimmung das Ziel des nächsten Kapitels sein wird. Näher eingegangen wird auch auf den Eichsektor der Lagrangedichte, da dieser einen der wesentlichen Aspekte der hier vorgestellten Theorie enthält.

3.1 Nichtkommutative Eichtransformationen

Die infinitesimalen Eichtransformationen einer kommutativen nichtabelschen Eichtheorie mit der Lie-Algebra-Struktur

$$[T^a, T^b] = \mathrm{i} f_c^{ab} T^c \tag{3.1}$$

sind durch

$$\delta_\lambda \Psi = \mathrm{i}\lambda\Psi\,, \tag{3.2a}$$
$$\delta_\lambda A_\mu = \partial_\mu \lambda + \mathrm{i}[\lambda, A_\mu]\,, \tag{3.2b}$$

mit dem raumzeitabhängigen $\lambda = \lambda_a T^a$, gegeben, wobei ab dieser Stelle die Kopplungskonstante in der Definition des Eichfeldes enthalten ist. Betrachtet man die Hintereinanderausführung zweier Eichtransformationen mit den entsprechenden Parametern λ und σ, so muss das Ergebnis auch eine Eichtransformation sein. Für infinitesimale Eichtransformationen gilt:

$$\begin{aligned}(\delta_\lambda\delta_\sigma - \delta_\sigma\delta_\lambda)\Psi &= \delta_\lambda(\mathrm{i}\sigma\Psi) - \delta_\sigma(\mathrm{i}\lambda\Psi) = \\ &= \mathrm{i}(\delta_\lambda\sigma)\Psi - \sigma\lambda\Psi - \mathrm{i}(\delta_\sigma\lambda)\Psi + \lambda\sigma\Psi = [\lambda,\sigma]\Psi \equiv \delta_{\lambda\times\sigma}\Psi\,,\end{aligned} \tag{3.3}$$

mit der Abkürzung

$$\lambda \times \sigma = -\mathrm{i}[\lambda, \sigma] = \lambda_a \sigma_b f_c^{ab} T^c\,. \tag{3.4}$$

Dabei wurde die Produktregel

$$\delta_\lambda(\sigma\Psi) = (\delta_\lambda\sigma)\Psi + \sigma(\delta_\lambda\Psi) \tag{3.5}$$

verwendet.
Geht man nun zu Eichtheorien auf einer nichtkommutativen Raumzeit über, so lautet das nichtkommutative Pendant der Eichtransformationen (3.2):

$$\hat{\delta}_{\widehat{\lambda}}\widehat{\Psi} = \mathrm{i}\widehat{\lambda}\widehat{\Psi}\,, \tag{3.6a}$$
$$\hat{\delta}_{\widehat{\lambda}}\widehat{A}_\mu = \partial_\mu\widehat{\lambda} + \mathrm{i}[\widehat{\lambda}, \widehat{A}_\mu]\,, \tag{3.6b}$$

oder äquivalent dazu im Sternprodukt-Formalismus:

$$\hat{\delta}_\lambda \Psi = \mathrm{i}\lambda \star \Psi\,, \tag{3.7a}$$
$$\hat{\delta}_\lambda A_\mu = \partial_\mu\lambda + \mathrm{i}[\lambda \stackrel{\star}{,} A_\mu]\,. \tag{3.7b}$$

Mit diesen Eichtransformationen wird (3.3) zu

$$(\hat{\delta}_\lambda\hat{\delta}_\sigma - \hat{\delta}_\sigma\hat{\delta}_\lambda)\Psi = [\lambda \stackrel{\star}{,} \sigma] \star \Psi\,. \tag{3.8}$$

Wie schon in Kapitel 2 angesprochen, gehört der Kommutator auf der rechten Seite nicht mehr der Lie-Algebra, sondern der universellen einhüllenden Algebra an:

$$[\lambda \stackrel{\star}{,} \sigma] = \frac{1}{2}\{\lambda_a \stackrel{\star}{,} \sigma_b\}[T^a, T^b] + \frac{1}{2}[\lambda_a \stackrel{\star}{,} \sigma_b]\{T^a, T^b\}\,. \tag{3.9}$$

Diese Algebra gibt es immer, sie wird von Produkten von Generatoren aufgespannt und ist unendlichdimensional. Um $SU(N)$-Eichtheorien nichtkommutativ beschreiben zu können, müssen die Eichparameter der einhüllenden Algebra angehören (vgl. Kap. 2). Man wählt als Basis der einhüllenden Algebra $:T^a:, :T^aT^b:, \ldots$, wobei die Doppelpunkte eine Normalordnung bezeichnen, um der Mehrfachzählung äquivalenter Produkte vorzubeugen. Eine mögliche Basis ist durch vollständig symmetrisierte Produkte von Generatoren gegeben:

$$
\begin{aligned}
:T^a: \;&=\; T^a \qquad (3.10)\\
:T^aT^b: \;&=\; \frac{1}{2}\left\{T^a, T^b\right\} = \frac{1}{2}\left(T^aT^b + T^bT^a\right)\\
:T^aT^bT^c: \;&=\; \frac{1}{6}\Big(T^aT^bT^c + T^aT^cT^b + T^bT^aT^c + T^bT^cT^a +\\
&\qquad + T^cT^aT^b + T^cT^bT^a\Big)\\
&\;\;\vdots
\end{aligned}
$$

Entwickelt man den nichtkommutativen Eichparameter in dieser Basis:

$$
\widehat{\lambda} = \lambda^0_a T^a + \lambda^1_{ab} :T^aT^b: + \lambda^2_{abc} :T^aT^bT^c: \ldots\,, \tag{3.11}
$$

erkennt man die unendlich vielen Freiheitsgrade. Das stellt jedoch kein Problem dar, denn, wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, können alle Entwicklungskoeffizienten aus (3.11) nur durch die kommutativen Größen – λ, A und deren Ableitungen – ausgedrückt werden. Dafür zuständig sind die schon mehrfach erwähnten SWMs, auf die sich der nächste Abschnitt konzentrieren wird. Durch die SWMs wird durch ein bestimmtes (λ, A)-Paar der kommutativen Eichtheorie in der einhüllenden Algebra ein unendlicher „Turm" $\widehat{\lambda}[\lambda, A]$ definiert:

$$
\begin{array}{ccl}
 & & \widehat{\lambda}[\lambda, A] = \\
\underbrace{\lambda,\, A}_{\in(\mathcal{A},\cdot)} & \longrightarrow & \underbrace{\begin{array}{r} \lambda^0_a \\ \lambda^1_{ab} \\ \lambda^2_{abc} \\ \\ \lambda^{n-1}_{a_1b_2\ldots a_n} \\ \\ \end{array}}_{\in(\mathcal{A},\star)} \begin{array}{l} :\; T^a \;:\; + \\ :\; T^aT^b \;:\; + \\ :\; T^aT^bT^c \;:\; + \\ \vdots \\ :\; T^{a_1}T^{a_2}\ldots T^{a_n} \;:\; + \\ \vdots \end{array}
\end{array} \tag{3.12}
$$

Von nun an bezeichnen Größen mit einem Dach ($\widehat{\ }$) solche Größen, welche mittels SWMs auf die kommutativen Größen abgebildet werden können.

3.2 Seiberg-Witten-Abbildungen

Die Idee, nichtkommutative Größen auf kommutative Größen abzubilden, stammt aus der Stringtheorie, in der gezeigt werden konnte, dass die Physik auf einer D-Brane sowohl durch eine nichtkommutative $U(N)$-Eichtheorie als auch durch eine Eichtheorie auf der gewöhnlichen kommutativen Raumzeit beschrieben werden kann. Seiberg und Witten zeigten in [3], dass sich gewöhnliche und nichtkommutative Yang-Mills-Felder aus derselben, auf zwei verschiedene Arten regularisierte Quantenfeldtheorie ergeben und dass es folglich eine Transformation zwischen den gewöhnlichen und nichtkommutativen Feldern geben muss, so dass die Eichinvarianz der gewöhnlichen auf diejenige der nichtkommutativen Yang-Mills-Theorie abgebildet wird[1]. Das bedeutet, dass eine Eichtransformation der gewöhnlichen, kommutativen Felder eine Eichtransformation der nichtkommutativen Felder induziert. Es muss also eine Abbildung

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda} \ &: \ \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \widehat{\mathcal{A}} \\ &\quad (\lambda, A) \mapsto \widehat{\lambda}[\lambda, A] \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} \widehat{A} \ &: \ \mathcal{A} \to \widehat{\mathcal{A}} \\ &\quad A \mapsto \widehat{A}[A] \end{aligned}$$

gefunden werden, so dass die Eichäquivalenzbedingung

$$\widehat{A}(A + \delta_\lambda A) = \widehat{A}(A) + \hat{\delta}_{\widehat{\lambda}} \widehat{A}(A) \tag{3.13}$$

gilt. Ausgehend von dieser Bedingung wurden in [3] die sogenannten Seiberg-Witten-Maps gefunden:

$$\widehat{A}_\xi[A] = A_\xi + \frac{1}{4}\theta^{\mu\nu}\{A_\nu, \partial_\mu A_\xi\} + \frac{1}{4}\theta^{\mu\nu}\{F_{\mu\xi}, A_\nu\} + \mathcal{O}(\theta^2), \tag{3.14a}$$

$$\widehat{\Psi}[\Psi, A] = \Psi + \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu} A_\nu \partial_\mu \Psi + \frac{i}{8}\theta^{\mu\nu}[A_\mu, A_\nu]\Psi + \mathcal{O}(\theta^2), \tag{3.14b}$$

$$\tag{3.14c}$$

$$\widehat{\lambda}[\lambda, A] = \lambda + \frac{1}{4}\theta^{\mu\nu}\{A_\nu, \partial_\mu \lambda\} + \mathcal{O}(\theta^2)\,. \tag{3.14d}$$

In dieser Arbeit sollen die Gleichungen (3.14) jedoch auf eine etwas einfachere Weise hergeleitet werden [20]. Um konsistent zu bleiben, muss auch die nichtkommutative Version von Gleichung (3.2) gelten. Nach der Ausführung der SWMs und Berücksichtigung der Eichäquivalenz wird Gleichung (3.8) zu:

$$(\delta_\lambda \delta_\sigma - \delta_\sigma \delta_\lambda)\widehat{\Psi}[\Psi, A] = \delta_{\lambda \times \sigma} \widehat{\Psi}[\Psi, A], \tag{3.15}$$

Aus dieser Bedingung können nun die SWMs für die Eichparameter hergeleitet werden. Anschließend können mit Hilfe der Eichtransformationen der Felder $\widehat{A}_\mu[A]$ und $\widehat{\Psi}[\Psi, A]$

$$\delta_\lambda \widehat{\Psi} = \mathrm{i}\widehat{\lambda}[\lambda, A] \star \Psi\,, \tag{3.16a}$$

$$\delta_\lambda \widehat{A}_\mu = \partial_\mu \widehat{\lambda}[\lambda, \Psi] + \mathrm{i}[\lambda \stackrel{\star}{,} A_\mu]\,, \tag{3.16b}$$

die SWMs für die Felder bestimmt werden. Im Folgenden wird die Abhängigkeit von den kommutativen Größen λ und A nicht mehr explizit angegeben.

[1] Es kann sich dabei nicht um einen Isomorphismus zwischen der nichtkommutativen und der gewöhnlichen Eichgruppe handeln: bei der $U(1)$-Eichgruppe handelt es sich um eine abelsche Eichgruppe, während deren nichtkommutative Erweiterung nichtabelsch ist, wie in Kapitel 2 gezeigt wurde. Eine abelsche und eine nichtabelsche Gruppe können nicht zueinander isomorph sein.

Die Konsistenzbedingung (3.15) kann ausgeschrieben werden:

$$\delta_\lambda(\mathrm{i}\widehat{\sigma} \star \widehat{\Psi}) - \delta_\sigma(\mathrm{i}\widehat{\lambda} \star \widehat{\Psi}) = \mathrm{i}\widehat{\lambda \times \sigma} \star \widehat{\Psi}\,. \tag{3.17}$$

Es muss berücksichtigt werden, dass nun die Eichparameter $\widehat{\lambda}$ und $\widehat{\sigma}$ von dem gewöhnlichen Feld A abhängen und eine Eichtransformation δ auf diese gemäß (3.2) wirkt. Man erhält weiterhin:

$$\mathrm{i}\delta_\lambda\widehat{\sigma} - \mathrm{i}\delta_\sigma\widehat{\lambda} + [\widehat{\lambda} \stackrel{\star}{,} \widehat{\sigma}] = \mathrm{i}\widehat{\lambda \times \sigma}\,. \tag{3.18}$$

Die Lösungen von (3.18) findet man, indem man den Eichparameter in θ entwickelt, ihn dann in obige Gleichung einsetzt und diese Ordnung für Ordnung in θ löst. Dieser Ansatz wird durch das Sternprodukt (2.20) gerechtfertigt, das sich in seiner „Nichtkommutativität“ entwickeln lässt:

$$(f \star g)(x) = f(x) \cdot g(x) + \frac{\mathrm{i}}{2} h\theta^{\mu\nu}\partial_\mu f(x)\partial_\nu g(x) + \dots\,, \tag{3.19}$$

wobei h lediglich ein Parameter[2] ist, der an dieser Stelle eingeführt wurde, um die Entwicklung zu beschreiben. Für $h \to 0$ erhält man statt des Sternprodukts das gewöhnliche Punktprodukt. Es stellt sich die Frage, ob man die nichtkommutativen Größen $\widehat{\lambda}$, $\widehat{A}$ und $\widehat{\Psi}$ auch als lokale Funktionen (d. h. mit einer endlichen Anzahl von Ableitungen) darstellen kann, die im Grenzfall $h \to 0$ die entsprechenden Größen der gewöhnlichen Theorie auf der kommutativen Raumzeit ergeben. In diesem Sinn entwickelt man den Eichparameter in h:

$$\widehat{\lambda} = \lambda^0 + \lambda^1 h + \lambda^2 h^2 + \dots\,. \tag{3.20}$$

Im Folgenden wird nur die Entwicklung bis zur ersten Ordnung in h betrachtet. Die Konsistenzbedingung in nullter und erster Ordnung h lautet nun:

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\delta_\lambda(\sigma^0 + h\sigma^1) - \mathrm{i}\delta_\sigma(\lambda^0 + h\lambda^1) + [\lambda^0 + h\lambda^1, \sigma^0 + h\sigma^1] + \\ &\quad + \frac{\mathrm{i}}{2}h\theta^{\mu\nu}\{\partial_\mu\lambda^0 + h\partial_\mu\lambda^1, \partial_\nu\sigma^0 + h\partial_\nu\sigma^1\} = \mathrm{i}(\lambda \times \sigma)^0 + \mathrm{i}h(\lambda \times \sigma)^1\,.\end{aligned} \tag{3.21}$$

In nullter Ordnung erhält man

$$\mathrm{i}\delta_\lambda\sigma^0 - \mathrm{i}\delta_\sigma\lambda^0 + [\lambda^0, \sigma^0] = \mathrm{i}(\lambda \times \sigma)^0\,, \tag{3.22}$$

was durch $\lambda^0 = \lambda$, $\sigma^0 = \sigma$ und $(\lambda \times \sigma)^0 = -\mathrm{i}[\lambda, \sigma]$ gelöst wird. Für $h \to 0$ erhält man also gerade die Eichparameter der kommutativen Theorie. In erster Ordnung, mit $\lambda^0 = \lambda$ und $\sigma^0 = \sigma$, findet man:

$$\mathrm{i}\delta_\lambda\sigma^1 - \mathrm{i}\delta_\sigma\lambda^1 + [\lambda^1, \sigma] + [\lambda, \sigma^1] - \mathrm{i}(\lambda \times \sigma)^1 = -\frac{\mathrm{i}}{2}\theta^{\mu\nu}\{\partial_\mu\lambda, \partial_\nu\sigma\}\,, \tag{3.23}$$

wobei der θ-abhängige Term, der sich aus der Entwicklung des Sternprodukts ergibt, auf die rechte Seite gebracht wurde, um den homogenen und inhomogenen Teil der Gleichung (3.23) zu trennen.

[2]Der Paramater h darf dabei *nicht* mit dem Planck'schen Wirkungsquantum verwechselt werden: $h \neq 2\pi\hbar$

Die Lösungen der homogenen Gleichung werden durch

$$\lambda^1_H = c\,\theta^{\mu\nu}\,\{\partial_\mu\lambda, F_\nu\} \tag{3.24a}$$
$$\sigma^1_H = c\,\theta^{\mu\nu}\,\{\partial_\mu\sigma, F_\nu\} \tag{3.24b}$$
$$(\lambda\times\sigma)^1_H = c\,\theta^{\mu\nu}\,\{\partial_\mu(\lambda\times\sigma), F_\nu\} = = -\mathrm{i}\,c\,\theta^{\mu\nu}\,\{[\partial_\mu\lambda,\sigma]+[\lambda,\partial_\mu\sigma], F_\nu\} \tag{3.24c}$$

gegeben, wobei $\lambda\times\sigma = -\mathrm{i}[\lambda,\sigma]$ verwendet wurde und c eine beliebige Konstante darstellt. Dabei ist F_ν eine Größe, die sich lediglich in der adjungierten Darstellung transformieren muss[3]:

$$\delta_\lambda F_\nu = \mathrm{i}[\lambda, F_\nu]\,. \tag{3.25}$$

Dass (3.24) eine Lösung darstellt, lässt sich überprüfen, indem man in (3.23) λ^1_H, σ^1_H und $(\lambda\times\sigma)^1$ gemäß (3.24) einsetzt.
Da der inhomogene Anteil der Gleichung eine lineare Abhängigkeit in θ aufweist, macht man für die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (3.23) den Ansatz:

$$\lambda^1_S = \frac{1}{4}\theta^{\mu\nu}\,\{\partial_\mu\lambda, A_\nu\} = \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu\lambda^a A^b_\nu : T_a T_b :, \tag{3.26}$$

wobei sich das A_ν wie (3.2b) transformiert. Der im Vergleich zu (3.25) zusätzliche Term im Transformationsverhalten von A_ν liefert in (3.23) Beiträge, die den inhomogenen Anteil wegheben. Die allgemeine Lösung der Konsistenzbedingung in erster Ordnung in der „Nichtkommutativität“ setzt sich aus den Lösungen der homogenen Gleichung und der speziellen Lösung zusammen:

$$\lambda^1 = \theta^{\mu\nu}\big\{\partial_\mu\lambda, \frac{1}{4}A_\nu + c\,F_\nu\big\} \tag{3.27}$$

Fasst man nun die Ergebnisse für die nullte und die erste Ordnung in den Entwicklungsparameter h zusammen, so ergibt sich für den Eichparameter gerade die SWM (3.14):

$$\widehat{\lambda}[\lambda, A] = \lambda + \frac{1}{4}\theta^{\mu\nu}\,\{\partial_\mu\lambda, A_\nu\}\;. \tag{3.28}$$

Die SWMs für die Felder $\widehat{\Psi}$ und $\widehat{A}$ erhält man durch dieselbe Vorgehensweise: Man setzt deren Entwicklungen in h

$$\widehat{\Psi} = \Psi^0 + \Psi^1 h + \Psi^2 h^2 + \ldots \tag{3.29}$$
$$\widehat{A} = A^0 + A^1 h + A^2 h^2 + \ldots \tag{3.30}$$

in die entsprechenden Eichtransformationsgleichungen (3.16) ein und löst die erhaltenen Gleichungen für die nullte und erste Ordnung, indem man für das dabei auftretende λ^1 die Lösung (3.26) einsetzt. Die Lösungen sind schließlich durch (3.14c) bzw. (3.14a) gegeben.

[3]Eine solche Größe lässt sich z. B. aus dem gewöhnlichen Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ und der kovarianten Ableitung konstruieren: $F_\nu = \theta^{\alpha\beta} D_\alpha F_{\beta\nu}$

Zusammenfassend kann man sagen, dass die SWMs durch die speziellen Lösungen der Konsistenzbedingung (3.15) und der Eichtransformationen (3.16) gegeben werden. Sie sind eindeutig bis auf die Freiheiten, die durch die Lösungen der homogenen Gleichungen gegeben werden und die durch eine Umdefinition der klassischen Felder in die SWMs absorbiert werden können:

$$\tilde{A}_\nu = A_\nu + 4cF_\nu \,, \tag{3.31}$$

wobei das Feld $\tilde{A}_\nu$ dasselbe Transformationsverhalten wie A_ν aufweist:

$$\delta_\lambda \tilde{A}_\nu = \partial_\nu \lambda + i[\lambda, \tilde{A}_\nu] \,. \tag{3.32}$$

Dank der Freiheiten der SWMs kann das in Kapitel 2 erwähnte Ladungsproblem gelöst werden. Dieses bestand darin, dass für jedes Materiefeld ein entsprechendes Photonfeld benötigt wurde, das von der jeweiligen Ladung des Materiefeldes abhing, ansonsten wäre die Ward-Identität verletzt worden. Man kann nun tatsächlich *rein formal* unterschiedliche Photonfelder $\widehat{a}_\mu^{(n)}$ für unterschiedliche Ladung $q^{(n)}$ tragende Materiefelder $\widehat{\Psi}^{(n)}$ einführen, mit $\widehat{A}_\mu \star \widehat{\Psi}^{(n)} = eq^{(n)} \widehat{a}_\mu^{(n)} \star \widehat{\Psi}^{(n)}$. Alle diese verschiedenen Photonfelder werden jedoch via SWM (3.14a) auf das *eine* physikalische Photonfeld a_μ mit $A_\mu = eQa_\mu$ abgebildet:

$$\widehat{a}_\xi^{(n)} = a_\xi + \frac{eq^{(n)}}{4} \theta^{\mu\nu} \{a_\nu, \partial_\mu a_\xi\} + \frac{eq^{(n)}}{4} \theta^{\mu\nu} \{f_{\mu\xi}, a_\nu\} + \mathcal{O}(\theta^2) \,, \tag{3.33}$$

mit dem Feldstärketensor $f_{\mu\xi} = \partial_\mu a_\xi - \partial_\xi a_\mu - \mathrm{i}eQ[a_\mu, a_\xi]$.
In den nächsten Abschnitten werden zwei verschiedene Versionen eines NCSM vorgestellt. Der Unterschied liegt in der Wahl der Darstellung, in der die Felder leben. Denn im Gegensatz zum SM hat man im nichtkommutativen Fall in den kinetischen Termen eine Freiheit in der Wahl der Spur über die Felder:

$$-\int \mathrm{d}^4x\, \mathbf{Tr} \widehat{F}_{\mu\nu} \star \widehat{F}^{\mu\nu} \,. \tag{3.34}$$

Sie wird dadurch gegeben, dass die Felder nicht mehr der Lie-Algebra angehören, in der

$$\mathbf{Tr}[T^a, T^b] = \frac{1}{2}\delta^{ab} \tag{3.35}$$

gilt, sondern der einhüllenden Algebra, in der nunmehr die Darstellung angegeben werden muss. Der kinetische Term ist folglich abhängig von der Wahl der Darstellung. In der minimalen Variante des NCSM wird die Spur über die $U(1)$-, $SU(2)$- und $SU(3)$-Sektoren gewählt, da diese Wahl die kleinstmöglichen Erweiterungen in Bezug auf das kommutative SM aufweist. In Abschnitt 3.4 wird eine natürlichere und physikalischere Alternative für die Wahl der Spur gegeben: als Summe über die Teilchen im Modell.

3.3 Das minimale nichtkommutative Standardmodell

In Abschnitt 3.1 wurde gezeigt, dass eine nichtkommutative Beschreibung von $SU(N)$-Eichtheorien möglich ist. Durch den dafür notwendigen Übergang von

der Lie-Algebra zur einhüllenden Algebra entstehen unendlich viele Freiheitsgrade, die jedoch mittels den in Abschnitt 3.2 vorgestellten SWMs auf die richtige Anzahl von Freiheitsgraden der kommutativen Theorie reduziert werden können. Damit ist die Möglichkeit gegeben, eine nichtkommutative Erweiterung des SMs mit der Eichgruppe $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ zu formulieren. Bemerkenswert an diesem Modell ist, dass diese Erweiterung ohne die Einführung zusätzlicher Freiheitsgrade oder Parameter geschehen kann und dass der Teilcheninhalt des so beschriebenen NCSMs mit dem des SMs übereinstimmt.
Die Vorschrift, nach der man die Wirkung des NCSM erhält, ist dadurch gegeben, dass man in der SM-Wirkung sämtliche Felder durch die entsprechenden Seiberg-Witten-Abbildungen und sämtliche Produkte zwischen diesen durch die Sternprodukte ersetzt. Man erhält somit eine Wirkung, die nur noch von den physikalischen Feldern des SMs, deren Ableitungen und natürlich linear von θ abhängt, da die SWMs nur bis zur ersten Ordnung in θ betrachtet wurden.
Der Ausgangspunkt für die nichtkommutative Beschreibung der $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$-Eichtheorie ist die Wahl des Eichpotentials als das gesamte Potential der SM-Eichgruppe [4]:

$$V_\nu = g' \mathcal{A}_\nu Y + g \sum_{a=1}^{3} B_{\nu a} T_L^a + g_S \sum_{b=1}^{8} G_{\nu b} T_C^b \,, \tag{3.36}$$

und des entsprechenden Eichparameters

$$\lambda = g' \alpha Y + g \sum_{a=1}^{3} \alpha_a^L T_L^a + g_S \sum_{b=1}^{8} \alpha_b^S T_C^b, \tag{3.37}$$

wobei Y, T_L^a und T_C^b die Generatoren der $U(1)_Y$-, $SU(2)_L$- bzw. $SU(3)_C$-Eichgruppen und $\mathcal{A}_\nu, B_{\nu a}, G_{\nu b}$ die entsprechenden Eichfelder sind. Das Potential (3.36) und der Eichparameter (3.37) gehen als SWMs in die nichtkommutative Theorie ein. Die SWMs für Eichpotential und -parameter lauten gemäß (3.14):

$$\widehat{V}_\xi = V_\xi + \frac{1}{4}\theta^{\mu\nu}\{V_\nu, \partial_\mu V_\xi\} + \frac{1}{4}\theta^{\mu\nu}\{F_{\mu\xi}, V_\nu\} + \mathcal{O}(\theta^2)\,, \tag{3.38}$$

$$\widehat{\lambda} = \lambda + \frac{1}{4}\theta^{\mu\nu}\{V_\nu, \partial_\mu \Lambda\} + \mathcal{O}(\theta^2)\,, \tag{3.39}$$

mit dem gewöhnlichen Feldstärketensor $F_{\mu\nu} = \partial^\mu V^\nu - \partial^\nu V^\mu - \mathrm{i}[V^\mu, V^\nu]$. Das entsprechende nichtkommutative Analogon ist durch

$$\widehat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \widehat{V}_\nu - \partial_\nu \widehat{V}_\mu - \mathrm{i}[\widehat{V}_\mu \stackrel{\star}{,} \widehat{V}_\nu] \tag{3.40}$$

gegeben. Aufgrund der Nichtlinearität der SWMs (ihrerseits eine Folge der nichtlinearen Konsistenzbedingung) mischen die verschiedenen Eichgruppen in der ersten und höheren Ordnung in θ.
Die Wirkung des NCSMs

$$S_{\mathrm{NCSM}} = S_{\mathrm{fermions}} + S_{\mathrm{gauge}} + S_{\mathrm{Higgs}} + S_{\mathrm{Yukawa}} \tag{3.41}$$

erhält man, indem in der SM-Wirkung die Felder durch ihre SWMs ausgedrückt und die Produkte zwischen diesen durch die Sternprodukte ersetzt werden. Die gesamte Wirkung des minimalen NCSM wird in [4] ausführlich vorgestellt, hier wird weiterhin jedoch nur der für diese Arbeit wichtige Materie- und der Eichsektor betrachtet:

$$\begin{aligned} S_{\text{NCSM}} = S_{\text{fermions}} + S_{\text{gauge}} = \\ &= \int d^4x \sum_{i=1}^{3} \overline{\widehat{\Psi}}_L^{(i)} \star i\widehat{\not{D}}\widehat{\Psi}_L^{(i)} + \int d^4x \sum_{i=1}^{3} \overline{\widehat{\Psi}}_R^{(i)} \star i\widehat{\not{D}}\widehat{\Psi}_R^{(i)} \\ &- \int d^4x \frac{1}{2g'^2} \mathbf{Tr_1} \widehat{F}_{\mu\nu} \star \widehat{F}^{\mu\nu} - \int d^4x \frac{1}{2g^2} \mathbf{Tr_2} \widehat{F}_{\mu\nu} \star \widehat{F}^{\mu\nu} \\ &- \int d^4x \frac{1}{2g_S^2} \mathbf{Tr_3} \widehat{F}_{\mu\nu} \star \widehat{F}^{\mu\nu} . \end{aligned} \tag{3.42}$$

Dabei bezeichnen Ψ_L bzw. Ψ_R die links bzw. rechtshändigen Lepton- und Quarkfelder:

$$\Psi_L^{(i)} = \begin{pmatrix} L_L^{(i)} \\ Q_L^{(i)} \end{pmatrix}, \quad L_L^{(i)} = \begin{pmatrix} \nu_L^{(i)} \\ e_L^{(i)} \end{pmatrix}, \quad Q_L^{(i)} = \begin{pmatrix} u_L^{(i)} \\ d_L^{(i)} \end{pmatrix}, \quad \Psi_R^{(i)} = \begin{pmatrix} e_R^{(i)} \\ u_R^{(i)} \\ d_R^{(i)} \end{pmatrix} \tag{3.43}$$

Die Summation über i bedeutet die Summation über die drei Familien des SMs. Die explizite Form der sich aus (3.42) ergebenden Lagrangedichte für den Quarkanteil ist in Anhang A.1 für die neutralen Ströme angegeben. Sie hängt nur noch von kommutativen Feldern und deren Ableitungen ab, enthält aber neue Wechselwirkungen ($q\bar{q}ZZ$, $q\bar{q}ZA$, usw.), die zu dem in dieser Arbeit betrachteten Prozess beitragen.
Die Spuren in den kinetischen Termen sind die üblichen Spuren des SMs. Ohne auf weitere Details der Rechnungen einzugehen (hierfür sei auf [4] verwiesen), muss die Tatsache unterstrichen werden, dass für diese spezielle Wahl der Spur, in der Wirkung (3.42) *keine* neutralen Drei-Eichbosonen-Wechselwirkungen auftreten.

Der Higgs- und der Yukawa-Sektor werden in dieser Arbeit nicht betrachtet (siehe dazu [4]). Bemerkenswert ist jedoch die Tatsache, dass aufgrund weiterhin geltender kommutativer und nichtkommutativer $U(1)$-Eichinvarianz sowohl in dem minimalen NCSM, das hier vorgestellt wurde, als auch in dem folgenden nichtminimalen NCSM das Photon masselos bleibt.

3.4 Das nichtminimale nichtkommutative Standardmodell

Von besonderem Interesse für die vorliegende Arbeit ist eine nichtminimale kommutative Erweiterung des SMs bzw. eine Version des NCSMs, im Rahmen derer neutrale Drei-Eichbosonen-Kopplungen auftreten.
Es sei an dieser Stelle wieder an das Ladungsproblem erinnert, das dadurch gelöst wurde, dass für jedes eine unterschiedliche Ladung tragende Materiefeld formal ein eigenes Photonfeld eingeführt wurde. Dieses wurde anschließend

durch die SWM wieder auf das gewöhnliche Photonfeld abgebildet. Das legt die Idee nahe, über alle diese formal eingeführten Felder zu summieren, was eine natürlichere Wahl für die Spur in den Wechselwirkungstermen darstellt.
Man wählt folglich für das Materiefeld den Vektor

$$\Psi = \begin{pmatrix} e_R \\ L_L \\ u_R \\ d_R \\ Q_L \\ \phi \end{pmatrix}, \tag{3.44}$$

und für die Hyperladung Y eine Darstellung, in der die Hyperladungen sämtlicher Teilchen im Modell in der Hauptdiagonalen stehen. Eine Zusammenfassung der SM-Materiefelder und deren Ladungen ist in Anhang D gegeben.
Die Wirkung für nichtabelsche nichtkommutative Eichbosonen ist dann durch

$$S_{\text{gauge}} = -\frac{1}{2}\int d^4x\,\mathbf{Tr}\frac{1}{\mathbf{G}^2}\widehat{F}_{\mu\nu}\star\widehat{F}^{\mu\nu} \tag{3.45}$$

gegeben. Der Operator $\mathbf{G}$ beschreibt die Kopplung an das gesamte Eichfeld V_μ. $\mathbf{G}$ kommutiert mit allen Generatoren (Y, T_L^a, T_C^b) und lässt sich durch sechs Konstanten ausdrücken, die die Kopplungen an die sechs Materiefeld-Multipletts (3.44) beschreiben:

$$\mathbf{G}\widehat{\Psi}^{(n)} = g_n\widehat{\Psi}^{(n)}\,. \tag{3.46}$$

Da im Grenzfall $\theta \to 0$ die kommutative Wirkung erhalten werden muss, ergeben sich dadurch folgende Einschränkungen für die Konstanten g_i:

$$\mathbf{Tr}\frac{1}{\mathbf{G}^2}Y^2 = \frac{1}{2g'^2}\,, \tag{3.47a}$$

$$\mathbf{Tr}\frac{1}{\mathbf{G}^2}T_L^aT_L^b = \delta^{ab}\frac{1}{2g^2}\,, \tag{3.47b}$$

$$\mathbf{Tr}\frac{1}{\mathbf{G}^2}T_C^aT_C^b = \delta^{ab}\frac{1}{2g_S^2}\,. \tag{3.47c}$$

Auf diese Bedingungen wird im nächsten Kapitel näher eingegangen.
Die Lagrangedichte für den Eichsektor erhält man, indem man in (3.45) in den Ausdruck für den Feldstärketensor die SWM des gesamten Eichpotentials $\widehat{V}_\mu$ (3.38) einsetzt, das Sternprodukt ausführt und in der Spur über den Teilcheninhalt (3.44) des SMs summiert. Die Lagrangedichte, die man somit erhält, wird in Anhang A.2 angegeben. Sie enthält nun Wechselwirkungsterme zwischen neutralen Eichbosonen (z. B. $ZZ\gamma$, $\gamma\gamma\gamma$, Zgg usw.), die im Rahmen des SMs verboten sind und die im minimalen NCSM auch nicht auftreten. Die Kopplungskonstanten dieser Wechselwirkungen bestehen aus Kombinationen von g_i ($i = 1, \ldots, 6$). Sie sind nicht eindeutig festgelegt, können aber nur innerhalb des durch die Bedingungen (3.47) bestimmten Intervalls variieren.

Kapitel 4

Feynman-Regeln

In Kapitel 3 wurde gezeigt, wie man eine nichtkommutative Erweiterung der SM-Lagrangedichte in erster Ordnung θ erhalten kann. Da diese bereits in der Literatur angegeben wurde [4, 17], werden daraus in Anhang A.1 und A.2 nur diejenigen Anteile der Lagrangedichte extrahiert, die für den hier betrachteten Prozess von Bedeutung sind. Die Feynman-Regeln sind jedoch noch nicht vorhanden, daher müssen sie für die Vertizes, die für den Prozess $q\bar{q} \to Z\gamma$ relevant sind, zunächst hergeleitet werden. Damit beschäftigt sich dieses Kapitel.

Bevor mit der Herleitung der Feynman-Regeln begonnen werden kann, ist es notwendig, die Notationen und Konventionen, die im weiteren Teil der Arbeit verwendet werden, festzulegen. Der besseren Lesbarkeit wegen werden für die Kontraktionen der Impulse mit der Matrix $\theta^{\mu\nu}$ folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned} \theta^{\mu\nu} p_\mu k_\nu &= p\theta k = -k\theta p \\ \theta^{\mu\nu} p_\mu g_{\nu\rho} &= p\theta_\rho = -{}_\rho\theta p \\ \theta^{\mu\nu} g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} &= \theta_{\sigma\rho} = {}_\sigma\theta_\rho = -{}_\rho\theta_\sigma \end{aligned} \tag{4.1}$$

Bei der Herleitung der Feynman-Regeln werden alle Impulse als einlaufend betrachtet. Diese Konvention muss in den späteren Rechnungen berücksichtigt werden, indem für auslaufende Impulse das Vorzeichen entsprechend geändert wird.

Die Feynman-Regeln für Propagatoren bleiben die gleichen, wie die der kommutativen Theorie. Aufgrund der Integraleigenschaft (2.23) sind in der Wirkung Sternprodukte zweier Felder gleich den gewöhnlichen Punktprodukten, und folglich bleiben Propagatoren, da sie sich aus den Inversen von Zweiervertizes ergeben, von der Nichtkommutativität der Raumzeit unbeeinflusst.
Die Feynman-Regeln für die Vertizes werden nach der üblichen Methode bestimmt. Diese darf auch in der nichtkommutativen Theorie ohne Bedenken angewendet werden, da die Lagrangedichte nur von den Feldern auf der kommutativen Raumzeit und deren Ableitungen abhängt. Das allgemeine Vorgehen zur Herleitung von Feynman-Regeln aus einer gegebenen Lagrangedichte kann

folgendermaßen zusammengefasst werden:

1. Suche alle Produkte in $\mathcal{L}$, die genau eine bestimmte Auswahl von Feldern enthalten
2. Ersetze alle Ableitungen durch $(-\mathrm{i})$ mal die einlaufenden Impulse der Felder, auf die sie wirken (entspricht Fourier-Transformation)
3. Summiere über alle Permutationen der Indizes und Impulse gleicher äußerer Felder
4. Streiche alle äußeren Felder

Dieser Vorgehensweise folgend werden in den nächsten zwei Abschnitten die Feynman-Regeln für diejenigen Wechselwirkungen bestimmt, die für die Rechnungen der folgenden Kapiteln von Bedeutung sind.

4.1 Materie-Eichbosonen-Wechselwirkungen

In diesem Abschnitt sollen nun die Feynman-Regeln für die $q\bar{q}Z$-, $q\bar{q}\gamma$- und $q\bar{q}Z\gamma$-Wechselwirkungen berechnet werden. Der Quark-Sektor der nichtkommutativen Lagrangedichte, der die neutralen Ströme enthält, ist in Anhang A.1 angegeben. Hieraus müssen zunächst laut oben angegebenem „Rezept“ die Terme herausgesucht werden, die zu den erwähnten Wechselwirkungen führen:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{NC}} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_i \bar{u}_L^{(i)} \left(\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\gamma^\alpha + \theta^{\nu\alpha}\gamma^\mu\right) \\
\Big(\big(\cos\theta_W \partial_\mu A_\nu - \cos\theta_W \partial_\nu A_\mu - \sin\theta_W \partial_\mu Z_\nu + \sin\theta_W \partial_\nu Z_\mu\big) \\
\big(g' Y \partial_\alpha - \mathrm{i} Y^2 g'^2 \cos\theta_W A_\alpha + \mathrm{i} Y^2 g'^2 \sin\theta_W Z_\alpha - \mathrm{i}\frac{1}{2} Y g' g \cos\theta_W Z_\alpha - \\
- \mathrm{i}\frac{1}{2} Y g' g \sin\theta_W A_\alpha\big) + \frac{1}{2}\big(\cos\theta_W \partial_\mu Z_\nu - \cos\theta_W \partial_\nu Z_\mu + \\
+ \sin\theta_W \partial_\mu A_\nu - \sin\theta_W \partial_\nu A_\mu\big)\big(g\partial_\alpha - \mathrm{i} Y g' g \cos\theta_W A_\alpha + \\
+ \mathrm{i} Y g' g \sin\theta_W Z_\alpha - \frac{1}{2}\mathrm{i} g^2 \cos\theta_W Z_\alpha - \frac{1}{2}\mathrm{i} g^2 \sin\theta_W A_\alpha\big)\Big) u_L^{(i)} \\
- \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_i \bar{u}_R^{(i)} \left(\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\gamma^\alpha + \theta^{\nu\alpha}\gamma^\mu\right) \\
\Big(\big(\cos\theta_W \partial_\mu A_\nu - \cos\theta_W \partial_\nu A_\mu - \sin\theta_W \partial_\mu Z_\nu + \sin\theta_W \partial_\nu Z_\mu\big) \\
\big(g' Y \partial_\alpha - \mathrm{i} Y^2 g'^2 \cos\theta_W A_\alpha + \mathrm{i} Y^2 g'^2 \sin\theta_W Z_\alpha\big)\Big) u_R^{(i)} \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

Es wurde an dieser Stelle nur derjenige Anteil berücksichtigt, der u-Quarks betrifft, und der SM-Anteil weggelassen. Am Schluss muss der SM-Anteil natürlich, für diejenigen Wechselwirkungen, für die er existiert, hinzuaddiert werden. Dieses betrifft $q\bar{q}Z$ und $q\bar{q}\gamma$-Wechselwirkungen, denn Kontaktterme der Form $q\bar{q}ZZ$,

$q\bar{q}Z\gamma$, usw. sind im SM verboten. Für d-Quarks verlaufen die Rechnungen in derselben Art und Weise.
Die Summation über den Familienindex i wird im Folgenden weggelassen. Desweiteren werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad \text{und} \quad Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu \,. \tag{4.3}$$

Zunächst soll die $u\bar{u}Z$-Wechselwirkung untersucht werden. In der eben definierten Notation lautet der entsprechende Anteil der Lagrangedichte:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\mathrm{NC}}_{u\bar{u}Z} = &-\frac{\mathrm{i}}{2}\bar{u}_L\left(\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\gamma^\alpha + \theta^{\nu\alpha}\gamma^\mu\right)C_L Z_{\mu\nu}\partial_\alpha u_L \\ &-\frac{\mathrm{i}}{2}\bar{u}_R\left(\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\gamma^\alpha + \theta^{\nu\alpha}\gamma^\mu\right)C_R Z_{\mu\nu}\partial_\alpha u_R \,,\end{aligned} \tag{4.4}$$

wobei folgende Abkürzungen benutzt wurden:

$$C_L = -g' Y_L \sin\theta_W + \frac{1}{2} g\cos\theta_W \quad \text{und} \quad C_R = -g' Y_R \sin\theta_W \,. \tag{4.5}$$

Drückt man nun u_L und u_R durch u gemäß

$$u_L = \frac{1}{2}(1-\gamma^5) \quad \text{und} \quad u_R = \frac{1}{2}(1+\gamma^5) \tag{4.6}$$

aus, so erhält man:

$$-\frac{\mathrm{i}}{2}\bar{u}\left(\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\gamma^\alpha + \theta^{\nu\alpha}\gamma^\mu\right)\left(C_L\frac{1-\gamma^5}{2} + C_R\frac{1+\gamma^5}{2}\right)Z_{\mu\nu}\partial_\alpha u \,. \tag{4.7}$$

Die Klammer vor $Z_{\mu\nu}\partial_\alpha$ lässt sich weiterhin umformen, wenn man die Hyperladungen der rechts- und linkshändigen Quarks berücksichtigt (Anhang D) und $g'\cos\theta_W = g\sin\theta_W = e$ verwendet:

$$-\frac{\mathrm{i}}{2}\left(C_L\frac{1-\gamma^5}{2} + C_R\frac{1+\gamma^5}{2}\right) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{q}{2\cos\theta_W}\left(g_V - g_A\gamma^5\right) \,. \tag{4.8}$$

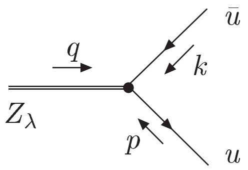
Dabei sind g_V und g_A die Vektor- bzw. Axialvektorkopplungen des SMs für das u-Quark:

$$g_V(u) = \frac{1}{2} - \frac{4}{3}\sin^2\theta_W \quad \text{und} \quad g_A(u) = \frac{1}{2} \,. \tag{4.9}$$

Man kann die Klammer (4.8) vorziehen, wobei die γ^5-Matrix wegen der Antivertauschung mit den γ^μ-Matrizen das Vorzeichen wechselt. Jetzt muss noch der Term

$$\bar{u}\left(\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\gamma^\alpha + \theta^{\nu\alpha}\gamma^\mu\right)Z_{\mu\nu}\partial_\alpha u \tag{4.10}$$

laut Vorschrift berechnet werden. Dafür legt man für die Felder folgende Impulse und Indizes fest:



Setzt man für jede Ableitung den entsprechenden Impuls mal einen Faktor $(-\mathrm{i})$ ein und berücksichtigt die Antisymmetrie $\theta^{\mu\nu} = -\theta^{\nu\mu}$, so erhält man:

$$\begin{aligned} &- \bar{u}\big(\theta^{\mu\nu}\gamma^\alpha q_\mu g_{\nu\lambda} p_\alpha + \theta^{\nu\alpha}\gamma^\mu (q_\mu g_{\nu\lambda} - q_\nu g_{\mu\lambda})\, p_\alpha\big)\, Z^\lambda u = \\ &\qquad = -\bar{u}\big(- q\theta_\lambda \not{p} + {}_\lambda\theta p \not{q} - q\theta p \gamma_\lambda\big)\, Z^\lambda u\,. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Werden die äußeren Felder gestrichen, der Vorfaktor (4.8) berücksichtigt und der SM-Anteil dazugenommen, so ergibt sich die Feynman-Regel für den $u\bar{u}Z$-Vertex in erster Ordnung θ:

$$-\mathrm{i}\frac{g}{2\cos\theta_W}(g_V + g_A\gamma^5)\left[\gamma^\lambda + \frac{p\theta q}{2}\gamma^\lambda - \left(\frac{p\theta^\lambda}{2}\not{q} - \frac{q\theta^\lambda}{2}\not{p}\right)\right]\,. \tag{4.12}$$

Der Vertex für die Kopplung der Quarks an das Photon lässt sich in derselben Art und Weise bestimmen, nur die Vorfaktoren setzen sich anders zusammen (s. Anhang B), da das Photon nicht zwischen rechts- und linkshändigen Teilchen unterscheidet.

Die Lagrangedichte (4.2) enthält auch Wechselwirkungsterme, die im SM verboten sind, wie z. B. den $u\bar{u}Z\gamma$-Kontaktterm, der nun weiterhin betrachtet werden soll. Der Ausgangspunkt ist wiederum der entsprechende Anteil der Lagrangedichte (4.2):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\mathrm{NC}}_{u\bar{u}Z\gamma} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\bar{u}&\left(\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\gamma^\alpha + \theta^{\nu\alpha}\gamma^\mu\right) \\ &\left(C_L\frac{1-\gamma^5}{2} + C_R\frac{1+\gamma^5}{2}\right)(Z_{\mu\nu}A_\alpha + A_{\mu\nu}Z_\alpha)\, u\,, \end{aligned} \tag{4.13}$$

mit den folgenden Abkürzungen:

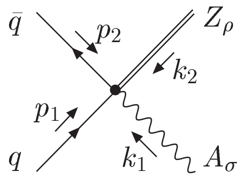
$$C_L = \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\sin(2\theta_W)\left(Y_L^2\, g'^2 - \frac{1}{4}g^2\right) - \cos(2\theta_W) Y_L\, g g'\right]\,, \tag{4.14}$$

$$C_R = \frac{\mathrm{i}}{2}\sin(2\theta_W) Y_R^2\, g'^2\,. \tag{4.15}$$

Die Klammer mit den Konstanten wird vorgezogen und ergibt

$$-\frac{1}{2}Q_q e \frac{g}{2\cos\theta_W}(g_V + g_A\gamma^5)\,, \tag{4.16}$$

mit g_V und g_A aus (4.9). Der restliche Teil aus (4.13) ergibt für folgende Impuls- und Indexkonventionen



den Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
\bar{u}\left(\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\gamma^{\alpha}+\theta^{\nu\alpha}\gamma^{\mu}\right)\Big[(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)Z_\alpha+(\partial_\mu Z_\nu-\partial_\nu Z_\mu)A_\alpha\Big]u = \\
= -\mathrm{i}\,\bar{u}\left(\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\gamma^{\alpha}+\theta^{\nu\alpha}\gamma^{\mu}\right) \\
\Big[\big(k_{1\mu}g_{\nu\sigma}-k_{1\nu}g_{\mu\sigma}\big)\,g_{\alpha\rho}+\big(k_{2\mu}g_{\nu\rho}-k_{2\nu}g_{\mu\rho}\big)\,g_{\alpha\sigma}\Big]A^\sigma Z^\rho u = \\
= -\mathrm{i}\,\bar{u}\big(k_1\theta_\sigma\gamma_\rho+{}_\sigma\theta_\rho\not{k}_1-k_1\theta_\rho\gamma_\sigma+k_2\theta_\rho\gamma_\sigma+{}_\rho\theta_\sigma\not{k}_2-k_2\theta_\sigma\gamma_\rho\big)A^\sigma Z^\rho u\,. \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

Nach dem Wegstreichen der Felder und Berücksichtigung des Vorfaktors (4.16) erhält man für den Kontaktterm $u\bar{u}Z\gamma$:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}\;Q_q\;e\frac{g}{2\cos\theta_W}(g_V+g_A\gamma^5) \\
&\qquad\left[\frac{k_1\theta_\sigma}{2}\gamma_\rho+\frac{{}_\sigma\theta_\rho}{2}\not{k}_1-\frac{k_1\theta_\rho}{2}\gamma_\sigma+\frac{k_2\theta_\rho}{2}\gamma_\sigma+\frac{{}_\rho\theta_\sigma}{2}\not{k}_2-\frac{k_2\theta_\sigma}{2}\gamma_\rho\right]. \qquad (4.18)
\end{aligned}
$$

In Anhang B sind die Feynman-Regeln für die $q\bar{q}Z$-, $q\bar{q}\gamma$- und $q\bar{q}Z\gamma$-Wechselwirkungen, die sich auf dem hier vorgeführten Weg herleiten lassen, zusammengefasst.

4.2 Drei-Eichbosonen-Wechselwirkungen

Wie in Kapitel 3 gezeigt wurde, lässt das nichtminimale NCSM aus [4] die Möglichkeit für die Existenz von neutralen Drei-Eichbosonen-Wechselwirkungen zu. Ein wichtiges Merkmal dieses Modells ist, dass die Kopplungskonstanten aufgrund der Freiheit in der Wahl der Spur nicht eindeutig festgelegt sind. Sie müssen jedoch gewissen Bedingungen genügen, die der Forderung entsprechen, dass die betrachtete NCSM-Lagrangedichte im Grenzfall $\theta \to 0$ die richtige SM-Lagrangedichte liefert. Sind die Kopplungen der einzelnen Eichfelder an die sechs Multipletts (3.44) durch $g_1, g_2, \ldots, g_6$ gegeben, so lauten die Bedingungen (3.47) folgendermaßen:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{g'^2} &= \frac{2}{g_1^2}+\frac{1}{g_2^2}+\frac{8}{3g_3^2}+\frac{2}{3g_4^2}+\frac{1}{3g_5^2}+\frac{1}{g_6^2}, && (4.19a)\\
\frac{1}{g^2} &= \frac{1}{g_2^2}+\frac{3}{g_5^2}+\frac{1}{g_6^2}, && (4.19b)\\
\frac{1}{g_s^2} &= \frac{1}{g_3^2}+\frac{1}{g_4^2}+\frac{2}{g_5^2}. && (4.19c)
\end{aligned}
$$

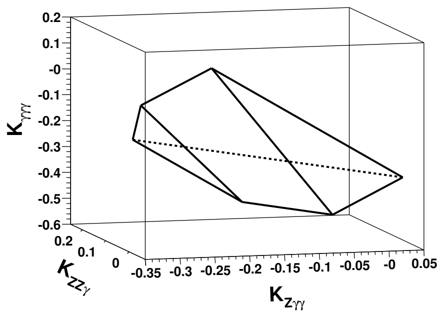


Abbildung 4.1: Der dreidimensionale Pentaeder, der die Werte für $K_{ZZ\gamma}$, $K_{Z\gamma\gamma}$ und $K_{\gamma\gamma\gamma}$ einschränkt

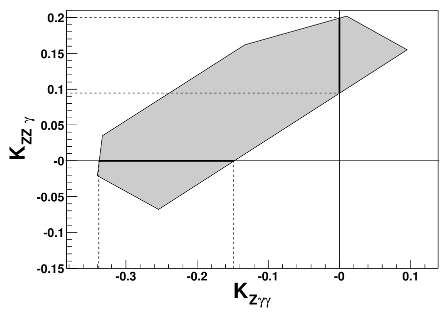


Abbildung 4.2: Der mögliche Bereich für $K_{ZZ\gamma}$ und $K_{Z\gamma\gamma}$

Diese Einschränkungen definieren zusammen mit der Bedingung $1/g_i^2 > 0$ $(i = 1, \ldots, 6)$ im sechsdimensionalen Raum, der von den $1/g_i^2$ aufgespannt wird, einen dreidimensionalen Pentaeder [17]. Dieser legt den möglichen Bereich für die Kopplungskonstanten fest.
Die Lagrangedichte für den Eichsektor im nichtminimalen NCSM wurde in [17] bestimmt und ist in Anhang A.2 angegeben, sowie die daraus resultierenden, für den hier betrachteten Prozess relevanten Eichboson-Wechselwirkungsterme $ZZ\gamma$ und $Z\gamma\gamma$. Die Kopplungskonstanten der Wechselwirkungsterme sind lineare Kombinationen von $(1/g_i^2)$. Drei von ihnen können innerhalb eines Bereiches variieren, der von den anderen drei durch die Bedingungen (4.19) festgelegt wird.
In [17, 21] wurde der dreidimensionale Simplex, der den Bedingungen (4.19) entspricht, dargestellt und die möglichen Werte für die verschiedenen Kopplungskonstanten berechnet. Für die vorliegende Arbeit sind die Kopplungskonstanten für die $ZZ\gamma$- und $Z\gamma\gamma$-Wechselwirkungsterme von Bedeutung. Deshalb wird in Abb. 4.1 der dreidimensionale Pentaeder veranschaulicht, der die Werte für $K_{ZZ\gamma}$, $K_{Z\gamma\gamma}$ und $K_{\gamma\gamma\gamma}$ einschränkt, während sein Schattenwurf in der $(K_{ZZ\gamma}; K_{Z\gamma\gamma})$-Ebene in Abb. 4.2 gezeigt wird. Dieser wurde durch die Projektion der Simplex-Ecken auf die $(K_{ZZ\gamma}; K_{Z\gamma\gamma})$-Ebene und die anschließende Erzeugung ihrer konvexen Hülle erstellt. Dabei werden insbesondere diejenigen Bereiche hervorgehoben, die sich ergeben, wenn jeweils eine der Kopplungskonstanten Null ist. Diese und die Maximalwerte der Kopplungskonstanten, d. h. die Werte an den Eckpunkten des Pentagons aus Abb. 4.2, sind in Tab. 4.1 angegeben. Es muss unterstrichen werden, dass *nicht beide* Kopplungskonstanten *gleichzeitig* verschwinden können.

Die Feynman-Regeln für die $ZZ\gamma$- bzw. $Z\gamma\gamma$-Kopplungen lassen sich aus den Lagrangedichten (A.6c) bzw. (A.6b) aus Anhang A.2 bestimmen. Die Herleitung erfolgt nach den üblichen Regeln, die am Anfang des Kapitels zusammengefasst worden sind. Die Rechnung wird nicht im Detail vorgeführt, da sie umfangreich, jedoch nicht weiter schwierig ist. Die Vorgehensweise soll anhand eines Beispiels verdeutlicht werden, die übrigen Terme lassen sich analog berechnen.

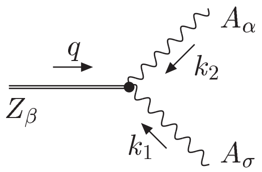
$\mathrm{K}_{ZZ\gamma}$	0.035	−0.021	−0.068	0.202	0.162
$\mathrm{K}_{Z\gamma\gamma}$	−0.333	−0.340	−0.254	0.010	−0.133
$\mathrm{K}_{ZZ\gamma}$	0.155	0.0	0.0	0.009	0.199
$\mathrm{K}_{Z\gamma\gamma}$	0.095	−0.338	−0.149	0.0	0.0

Tabelle 4.1: Die $ZZ\gamma$-, $Z\gamma\gamma$-Kopplungen bei der m_Z-Skala an den Eckpunkten des Pentagons aus Abb. 4.2 und für die möglichen Bereiche, wenn jeweils eine von ihnen verschwindet

Die Lagrangedichte für die $Z\gamma\gamma$-Wechselwirkung, die im Folgenden betrachtet werden soll, ist:

$$\mathcal{L}_{Z\gamma\gamma} = \frac{e}{4}\sin(2\theta_W)\ \mathrm{K}_{Z\gamma\gamma}\,\theta^{\rho\tau}\left[2Z^{\mu\nu}\left(2A_{\mu\rho}A_{\nu\tau} - A_{\mu\nu}A_{\rho\tau}\right)\right. \\ \left. + 8Z_{\mu\rho}A^{\mu\nu}A_{\nu\tau} - Z_{\rho\tau}A_{\mu\nu}A^{\mu\nu}\right]\,, \quad (4.20)$$

mit $A_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ und $Z_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$. Anhand des ersten Terms $\theta^{\rho\tau}Z^{\mu\nu}A_{\mu\rho}A_{\nu\tau}$ aus dem obigen Ausdruck soll das Verfahren zur Bestimmung der Feynman-Regel vorgeführt werden. Die Impuls- und Indexkonventionen müssen festgelegt werden:



Zunächst wird der betrachtete Term ausgeschrieben und dabei die Antisymmetrie der θ-Matrix ausgenutzt:

$$\theta^{\rho\tau}Z^{\mu\nu}A_{\mu\rho}A_{\nu\tau} = 2\theta^{\rho\tau}\big(\partial^\mu Z^\nu\,\partial_\mu A_\rho\,\partial_\nu A_\tau - \partial^\mu Z^\nu\,\partial_\rho A_\mu\,\partial_\nu A_\tau + \\ + \partial^\nu Z^\mu\,\partial_\rho A_\mu\,\partial_\nu A_\tau + \partial^\mu Z^\nu\,\partial_\rho A_\mu\,\partial_\tau A_\nu\big) \quad (4.21)$$

Wiederum wird der erste Term herausgegriffen und separat behandelt. Jede Ableitung wird durch $(-\mathrm{i})$ mal dem Impuls des Feldes, auf der sie wirkt, ersetzt:

$$\theta^{\rho\tau}\big(\partial^\mu Z^\nu\,\partial_\mu A_\rho\,\partial_\nu A_\tau\big) \rightarrow \\ (-\mathrm{i})^3\theta^{\rho\tau}\big[q^\mu Z_\beta(q)g^{\nu\beta}\,k_{2\mu}A^\alpha(k_2)g_{\rho\alpha}\,k_{1\nu}A^\sigma(k_1)g_{\tau\sigma}\big] = \\ = \mathrm{i}\theta^{\rho\tau}\big(q^\mu g^{\nu\beta}\,k_{2\mu}g_{\rho\alpha}\,k_{1\nu}g_{\tau\sigma}\big)Z_\beta(k_1)A^\sigma(k_2)A^\alpha(k_3)\,. \quad (4.22)$$

Jetzt muss über die simultanen Permutationen der Indizes und der Impulse der beiden Photonfelder summiert werden:

$$-\mathrm{i}\theta^{\rho\tau}\big[q^\mu g^{\nu\beta}\,\big(k_{2\mu}g_{\rho\alpha}\,k_{1\nu}g_{\tau\sigma} + k_{1\mu}g_{\rho\sigma}\,k_{2\nu}g_{\tau\alpha}\big)\big]Z_\beta A^\sigma A^\alpha\,. \quad (4.23)$$

Nach der Durchführung der Kontraktionen der Größen mit gleichen Indizes erhält man:

$$\mathrm{i}\big[(qk_2)\, k_{1\beta\,\alpha}\theta_\sigma + (qk_1)\, k_{2\beta\sigma}\theta_\alpha\big]\, Z^\beta A^\sigma A^\alpha\,. \tag{4.24}$$

Zuletzt müssen noch die äußeren Felder gestrichen werden. In derselben Art und Weise verfährt man mit sämtlichen Termen, die sich aus (4.20) ergeben, so dass man insgesamt für den $Z\gamma\gamma$-Vertex in erster Ordnung θ den Ausdruck

$$-\mathrm{i}2e\sin(2\theta_W)K_{Z\gamma\gamma}V_{\alpha\beta\sigma} \tag{4.25}$$

erhält, wobei die Abkürzung

$$\begin{aligned}
V_{\alpha\beta\sigma} \;=\; & [k_1\theta_\sigma(qk_2)g_{\beta\alpha} + q\theta_\beta(k_1k_2)g_{\alpha\sigma} + k_2\theta_\alpha(qk_1)g_{\sigma\beta} \\
& -k_1\theta_\sigma q_\alpha k_{2\beta} - k_2\theta_\alpha q_\sigma k_{1\beta} - q\theta_\beta k_{2\sigma}k_{1\alpha} \\
& -{}_\alpha\theta_\sigma(qk_2)k_{1\beta} - {}_\sigma\theta_\alpha(qk_1)k_{2\beta} - {}_\alpha\theta_\beta(k_1k_2)q_\sigma \\
& -{}_\beta\theta_\alpha(qk_1)k_\sigma - {}_\beta\theta_\sigma(qk_2)k_{1\alpha} - {}_\sigma\theta_\beta(k_1k_2)q_\alpha \\
& +{}_\alpha\theta k_1(qk_2)g_{\beta\sigma} + {}_\sigma\theta k_2(qk_1)g_{\beta\alpha} + {}_\alpha\theta q(k_1k_2)g_{\beta\sigma} \\
& +{}_\beta\theta k_2(qk_1)g_{\alpha\sigma} + {}_\beta\theta k_1(qk_2)g_{\alpha\sigma} + {}_\sigma\theta q(k_1k_2)g_{\beta\alpha} \\
& +k_2\theta_\sigma q_\alpha k_{1\beta} + k_1\theta_\alpha q_\sigma k_{2\beta} + k_2\theta_\beta k_{1\alpha}q_\sigma \\
& +q\theta_\alpha k_{1\beta}k_{2\sigma} + q\theta_\sigma k_{2\beta}k_{1\alpha} + k_1\theta_\beta k_{2\sigma}q_\alpha \\
& -k_2\theta k_1 q_\alpha g_{\beta\sigma} - k_1\theta k_2 q_\sigma g_{\beta\alpha} - k_2\theta q k_{1\alpha}g_{\beta\sigma} \\
& \qquad\qquad -q\theta k_2 k_{1\beta}g_{\alpha\sigma} - q\theta k_1 k_{2\beta}g_{\alpha\sigma} - k_1\theta q k_{2\sigma}g_{\beta\alpha}]
\end{aligned}$$

verwendet wurde.

Die Feynman-Regeln für die Vertizes, die hier hergeleitet wurden, sind in Anhang B noch einmal zusammengefasst. Nun kann mit der Berechnung der Amplituden für den Prozess $q\bar{q} \to Z\gamma$ begonnen werden.

Kapitel 5

Der Prozess $q\bar{q} \to Z\gamma$

In den vorangegangenen Kapiteln wurde gezeigt, wie die Einführung nichtkommutierender Koordinaten die Lagrangedichte ändert: SM-Wechselwirkungen erhalten zusätzliche θ-abhängige Terme und es kommen neue, im SM verbotene Wechselwirkungen hinzu, während Propagatoren unverändert bleiben. Nun steht das Werkzeug bereit, um den Prozess $p\bar{p} \to Z\gamma$ auf nichtkommutative Effekte hin zu untersuchen. Mit den oben berechneten Feynman-Regeln (in Anhang B zusammengefasst) lässt sich nun der differentielle Wirkungsquerschnitt für den Prozess $p\bar{p} \to Z\gamma$ berechnen.

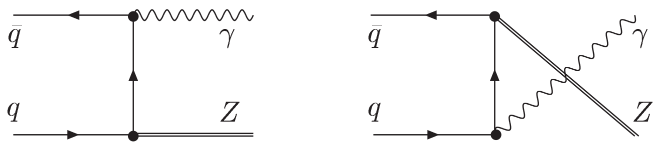
Den hadronischen Wirkungsquerschnitt $\sigma(p\bar{p} \to Z\gamma)$ erhält man durch Konvolution des partonischen Wirkungsquerschnittes $\hat{\sigma}(q\bar{q} \to Z\gamma)$ mit den partonischen Verteilungsfunktionen $f_{q/\bar{q}}(x, Q)$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
&\sigma(p(P_1)\bar{p}(P_2) \to Z\gamma) = \\
&\quad = \sum_q \int_0^1 \int_0^1 dx_1 dx_2 f_q(x_1, Q^2) f_{\bar{q}}(x_2, Q^2)\ \hat{\sigma}(q(x_1 P_1)\bar{q}(x_2 P_2) \to Z\gamma)\,. \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

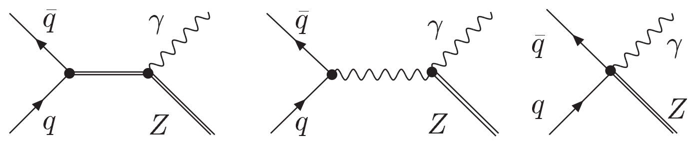
Es muss also zunächst der Prozess $q\bar{q} \to Z\gamma$ berechnet werden, was auch das Ziel dieses Kapitels ist. Es werden die Amplituden aufgestellt (Abschnitt 5.1) und anhand dieser die Ward-Identität für den betrachteten nichtkommutativen Prozess überprüft (Abschnitt 5.2). In Abschnitt 5.3 wird das Amplitudenquadrat und damit der differentielle Wirkungsquerschnitt berechnet, welcher dann für verschiedene Werte der NC-Kopplungskonstanten ($K_{Z\gamma\gamma}$; $K_{ZZ\gamma}$) und der NC-Skala Λ_{NC} untersucht wird (Abschnitt 5.4).

5.1 Die Amplituden

Im SM gibt es für den Prozess $q\bar{q} \to Z\gamma$ zwei Beiträge zur Gesamtamplitude: Die einzige Möglichkeit für ein $q\bar{q}$ -Paar, in ein Z und ein Photon überzugehen, ist im Rahmen des SMs durch den Austausch eines weiteren Quarks gegeben. Das liefert einen t- und einen u-Kanal-Beitrag:



Im NCSM kommen aufgrund neuer Terme in der Lagrangedichte neue, im SM verbotene Wechselwirkungen hinzu, so dass in diesem Fall drei weitere Diagramme zum Prozess $q\bar{q} \to Z\gamma$ beitragen: zwei s-Kanal Beiträge, wobei jeweils ein Photon bzw. ein Z-Boson ausgetauscht wird, und ein Kontaktterm-Diagramm, wobei das $q\bar{q}$-Paar direkt in die Endteilchen übergeht:



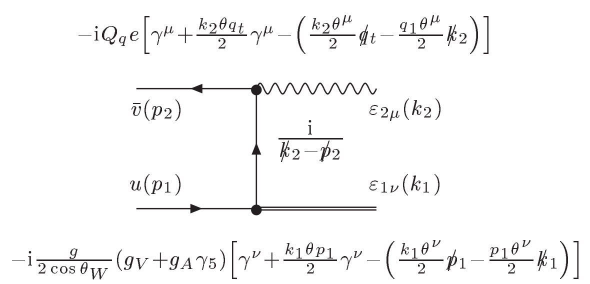
Der differentielle Wirkungsquerschnitt lässt sich gemäß [22] mit:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s}\frac{p_f}{p_i}|\mathcal{M}|^2 \tag{5.2}$$

berechnen, wobei p_f und p_i die Impulse der Teilchen im End- bzw. Anfangszustand bezeichnen und die Gesamtamplitude $\mathcal{M}$ durch die Summe der fünf obigen Feynman-Diagramme gegeben ist:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_t + \mathcal{M}_u + \mathcal{M}_{s/Z} + \mathcal{M}_{s/\gamma} + \mathcal{M}_4\,.$$

Die Amplituden für die einzelnen Beiträge lassen sich nach den üblichen Feynman-Regeln zusammenstellen, allerdings mit den neuen nichtkommutativen Vertexfaktoren, welche in Anhang B zusammengefasst sind. Im Folgenden werden die Quarkmassen vernachlässigt, was durch die große Schwerpunktsenergie ($\sqrt{s} \sim 1\,\text{TeV}$), bei denen der Prozess stattfinden soll, gerechtfertigt wird. Durch Einsetzen der Impulse, den Konventionen aus Kapitel 4 folgend, erhält man für das erste Diagramm (t-Kanal)



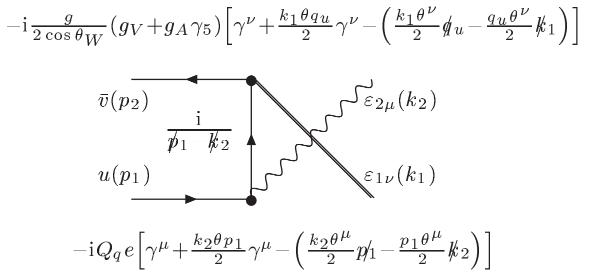
den Ausdruck:

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\mathcal{M}_t &= \bar{v}(p_2)(-\mathrm{i}Q_q e)\left[\gamma^\mu + \frac{k_2\theta q_t}{2}\gamma^\mu - \left(\frac{k_2\theta^\mu}{2}\not{q}_1 - \frac{q_t\theta^\mu}{2}\not{k}_2\right)\right]\frac{\mathrm{i}}{\not{q}_t} \\
&\quad (-\mathrm{i}\frac{g}{2\cos\theta_W})(g_V + g_A\gamma^5)\left[\gamma^\nu + \frac{k_1\theta p_1}{2}\gamma^\nu - \left(\frac{k_1\theta^\nu}{2}\not{p}_1 - \frac{p_1\theta^\nu}{2}\not{k}_1\right)\right] \\
&\quad \cdot\varepsilon_{1\nu}(k_1)\varepsilon_{2\mu}(k_2)\ u(p_1)\,.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Zur Notation der Polarisationsvektoren sei angemerkt, dass hier, entgegen den üblichen Konventionen, die Polarisationsvektoren der auslaufenden Eichbosonen mit ε statt ε^* bezeichnet werden. In späteren Rechnungen erweist sich diese Notation als übersichtlicher.
Nach Durchführung der Kontraktion der Indizes der γ-Matrizen mit den entsprechenden Raumzeit-Indizes der Polarisationsvektoren und mit den am Anfang des Kapitels eingeführten Notationen erhält man für die Amplitude folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\mathcal{M}_t &= -\mathrm{i}Q_q e \frac{g}{2\cos\theta_W} \frac{1}{q_t^2} \bar{v}(p_2)(g_V + g_A\gamma^5) \\ &\quad \left(\not{\varepsilon}_2 + \frac{p_2\theta k_2}{2}\not{\varepsilon}_2 - \frac{p_2\theta\varepsilon_2}{2}\not{k}_2\right) \not{q}_t \left(\not{\varepsilon}_1 + \frac{k_1\theta p_1}{2}\not{\varepsilon}_1 + \frac{p_1\theta\varepsilon_1}{2}\not{k}_1\right) u(p_1)\,. \end{aligned} \tag{5.4}$$

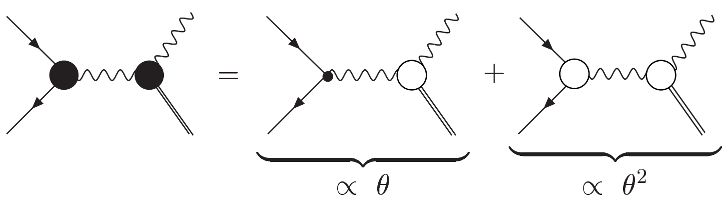
Für die restlichen Amplituden wird direkt das Ergebnis nach Durchführung der Index-Kontraktionen aufgeführt. So ergibt sich für den u-Kanal



folgender Ausdruck:

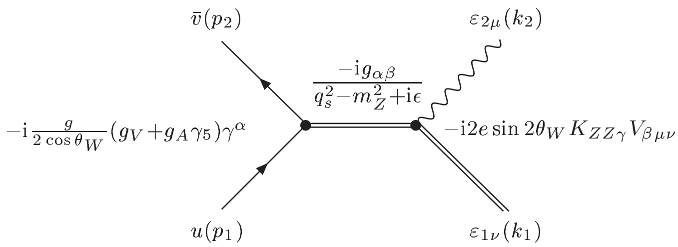
$$\begin{aligned} \mathrm{i}\mathcal{M}_u &= -\mathrm{i}Q_q e \frac{g}{2\cos\theta_W} \frac{1}{q_u^2} \bar{v}(p_2)(g_V + g_A\gamma^5) \\ &\quad \left(\not{\varepsilon}_1 + \frac{p_2\theta k_1}{2}\not{\varepsilon}_1 - \frac{p_2\theta\varepsilon_1}{2}\not{k}_1\right) \not{q}_u \left(\not{\varepsilon}_2 + \frac{k_2\theta p_1}{2}\not{\varepsilon}_2 + \frac{p_1\theta\varepsilon_2}{2}\not{k}_2\right) u(p_1)\,. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Die nächsten Diagramme sind wegen dem $Z\gamma\gamma$- bzw. dem $ZZ\gamma$-Vertex im Standardmodell verboten. Da die Rechnung in erster Ordnung θ durchgeführt werden soll und die Drei-Bosonen-Vertizes nur Terme enthalten, die proportional zu θ sind, wurde in der Amplitude nur die Kontraktion mit dem SM-Anteil des $q\bar{q}Z/\gamma$-Vertex durchgeführt. Diagrammatisch kann man sich die verschiedenen Vertex-Terme folgendermaßen veranschaulichen:



Dabei bezeichnet ⬤ den gesamten Vertex (sowohl SM- als auch NCSM-Anteil), • nur den SM-Anteil des Vertex und ○ nur Vertex-Terme, die linear in θ sind.

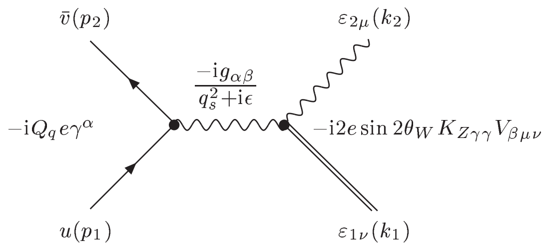
Daraus ist ersichtlich, dass man zum Berechnen der s-Kanal Amplituden in erster Ordnung θ nur das mittlere der obigen Diagramme berücksichtigen muss. Damit erhält man für den s/Z-Kanal



den Ausdruck

$$\mathrm{i}\mathcal{M}_{s/Z} = \mathrm{i}e\frac{g}{\cos\theta_W}\sin(2\theta_W)K_{ZZ\gamma}\frac{1}{q_s^2-m_Z^2} \bar{v}(p_2)\ (g_V+g_A\gamma^5)\not{V}_s^\theta\ u(p_1)\,, \quad (5.6)$$

und für den s/γ-Kanal:



den Ausdruck

$$\mathrm{i}\mathcal{M}_{s/\gamma} = 2\mathrm{i}Q_q e^2\sin(2\theta_W)K_{Z\gamma\gamma}\frac{1}{q_s^2}\bar{v}(p_2)\not{V}_s^\theta\ u(p_1)\,. \quad (5.7)$$

Dabei wurde folgende Abkürzung benutzt:

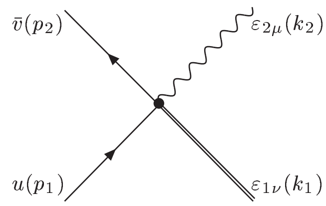
$$\begin{aligned}
\not{V}_s^\theta = \quad & k_1\theta\varepsilon_1(q_sk_2)\not{\varepsilon}_2 + q_s\theta\gamma(k_1k_2)(\varepsilon_1\varepsilon_2) + k_2\theta\varepsilon_2(q_sk_1)\not{\varepsilon}_1 \\
- \quad & k_1\theta\varepsilon_1(q_s\varepsilon_2)\not{k}_2 - k_2\theta\varepsilon_2(q_s\varepsilon_1)\not{k}_1 - q_s\theta\gamma(k_2\varepsilon_1)(k_1\varepsilon_2) \\
- \quad & \varepsilon_2\theta\varepsilon_1(q_sk_2)\not{k}_1 - \varepsilon_1\theta\varepsilon_2(q_sk_1)\not{k}_2 - \varepsilon_2\theta\gamma(k_1k_2)(q_s\varepsilon_1) \\
- \quad & \gamma\theta\varepsilon_2(q_sk_1)(k_2\varepsilon_1) - \gamma\theta\varepsilon_1(q_sk_2)(k_1\varepsilon_2) - \varepsilon_1\theta\gamma(k_1k_2)(q_s\varepsilon_2) \\
+ \quad & \varepsilon_2\theta k_1(q_sk_2)\not{\varepsilon}_1 + \varepsilon_1\theta k_2(q_sk_1)\not{\varepsilon}_2 + \varepsilon_2\theta q_s(k_1k_2)\not{\varepsilon}_1 \\
+ \quad & \gamma\theta k_2(q_sk_1)(\varepsilon_1\varepsilon_2) + \gamma\theta k_1(q_sk_2)(\varepsilon_1\varepsilon_2) + \varepsilon_1\theta q_s(k_1k_2)\not{\varepsilon}_2 \\
+ \quad & k_2\theta\varepsilon_1(q_s\varepsilon_2)\not{k}_1 + k_1\theta\varepsilon_2(q_s\varepsilon_1)\not{k}_2 + k_2\theta\gamma(k_1\varepsilon_2)(q_s\varepsilon_1) \\
+ \quad & q_s\theta\varepsilon_2(k_2\varepsilon_1)\not{k}_1 + q_s\theta\varepsilon_1(k_1\varepsilon_2)\not{k}_2 + k_1\theta\gamma(k_2\varepsilon_1)(q_s\varepsilon_2) \\
- \quad & k_2\theta k_1(q_s\varepsilon_2)\not{\varepsilon}_1 - k_1\theta k_2(q_s\varepsilon_1)\not{\varepsilon}_2 - k_2\theta q_s(k_1\varepsilon_2)\not{\varepsilon}_1 \\
- \quad & q_s\theta k_2(\varepsilon_1\varepsilon_2)\not{k}_1 - q_s\theta k_1(\varepsilon_1\varepsilon_2)\not{k}_2 - k_1\theta q_s(k_2\varepsilon_1)\not{\varepsilon}_2,
\end{aligned}$$

und für die ausgetauschten Impulse:

$$\begin{aligned} q_t = &\quad p_1 - k_1 = &\quad k_2 - p_2\,, \\ q_u = &\quad p_1 - k_2 = &\quad k_1 - p_2\,, \\ q_s = &\quad p_1 + p_2 = &\quad k_1 + k_2\,. \end{aligned}$$

Der Faktor iϵ im Nenner des Z- bzw. Photon-Propagators wurde im Ausdruck der Amplitude weggelassen, da der Prozess bei Energien stattfinden soll, die weitab der Z-Resonanz liegen ($\sqrt{s} \sim 1\,\mathrm{TeV}$). Ebenfalls aus diesem Grund wurde im Z-Propagator die Zerfallsbreite Γ_Z des Z-Bosons vernachlässigt.
Die letzte Amplitude besteht im Prinzip nur aus dem Kontaktterm-Vertex

$$\mathrm{i}\,Q_q\,e\frac{g}{2\cos\theta_W}(g_V+g_A\gamma^5)$$
$$\left[\frac{k_1\theta_\mu}{2}\gamma_\nu+\frac{\mu\theta\nu}{2}\not{k}_1-\frac{k_1\theta_\nu}{2}\gamma_\mu+\frac{k_2\theta_\nu}{2}\gamma_\mu+\frac{\nu\theta_\mu}{2}\not{k}_2-\frac{k_2\theta_\mu}{2}\gamma_\nu\right]$$



und enthält keinen Propagator:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\mathcal{M}_4 \quad = \quad & -\mathrm{i}Q_q e\frac{g}{2\cos\theta_W}\bar{v}(p_2)(g_V+g_A\gamma^5) \qquad (5.8) \\ & \left[\frac{k_2\theta\varepsilon_2}{2}\not{\varepsilon}_1+\frac{\varepsilon_2\theta\varepsilon_1}{2}\not{k}_2-\frac{k_2\theta\varepsilon_1}{2}\not{\varepsilon}_2+\frac{k_1\theta\varepsilon_1}{2}\not{\varepsilon}_2+\frac{\varepsilon_1\theta\varepsilon_2}{2}\not{k}_1-\frac{k_1\theta\varepsilon_2}{2}\not{\varepsilon}_1\right]u(p_1)\,. \end{aligned}$$

Bevor man zur Berechnung des gesamten Amplitudenquadrates übergeht, wird im folgenden Kapitel die Ward-Identität überprüft. Das Prüfen ihrer Gültigkeit an dieser Stelle ist besonders sinnvoll, da die Ward-Identität auch als Test für eine korrekte Aufstellung der Teilamplituden benutzt werden kann.

5.2 Ward-Identität

Physikalisch ist die Ward-Identität (WI) nicht nur ein Hinweis auf lokale Eichsymmetrien. Sie verhindert auch die Produktion von Eichbosonen mit unphysikalischen Polarisationszuständen, wenn die am Prozess beteiligten Teilchen alle auf der Massenschale liegen.

Im Folgenden wird allgemein die Vorgehensweise zur Herleitung der Ward-Identität beschrieben. Eine ausführliche Herleitung der Ward-Identität ist z. B. in [23] zu finden.
Um einen Ausdruck für den Eichbosonen-Propagator schreiben zu können, muss eine Eichfixierung gewählt werden. Die Lagrangedichte erhält somit einen neuen Term, den Eichfixierungsterm, was die Einführung von unphysikalischen Feldern, den sogenannten Faddeev-Popov-Geistern, zur Folge hat. Die gesamte Lagrangedichte ist nun

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{g.f.}} + \mathcal{L}_{\text{F.P.}}\,, \qquad (5.9)$$

mit der urspünglichen Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}(\mathrm{i}\not{D} - m)\psi, \tag{5.10}$$

dem Eichfixierungsterm

$$\mathcal{L}_{\text{g.f.}} = \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A^a_\mu)^2 \tag{5.11}$$

und dem Faddeev-Popov-Geistterm

$$\mathcal{L}_{\text{F.P.}} = \bar{c}^a(-\partial^2\delta^{ac} - g\partial^\mu f^{abc}A^b_\mu)c^c. \tag{5.12}$$

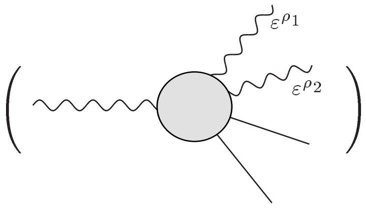
Die Rolle der Geister besteht darin, unphysikalische Beiträge zur Gesamtamplitude aufzuheben. Die neue Lagrangedichte enthält nun den Eichfixierungsterm $\mathcal{L}_{\text{g.f.}}$ und den Geistterm $\mathcal{L}_{\text{F.P.}}$ (welcher im kommutativen und abelschen Fall ignoriert werden kann, da hier die Geister nicht an das Eichfeld koppeln). Sie ist nun nicht mehr eichinvariant unter den üblichen Eichtransformationen. Becchi, Rouet und Stora konnten jedoch zeigen, dass diese erweiterte Lagrangedichte unter der nach ihnen genannten BRS-Transformation invariant bleibt. Die Folge der BRS-Symmetrie sind die Slavnov-Taylor-Identitäten, die zur Ward-Identität werden, wenn man Teilchen auf der Massenschale und physikalische Polarisationen betrachtet.

Die Ward-Identität muss in der NCQFT weiterhin erfüllt sein. Da sich in der Lagrangedichte Bilinearformen aufgrund der Integraleigenschaft (2.23) des Sternprodukts von denen der SM-Lagrangedichte nicht unterscheiden, bleiben auch die Propagatoren dieselben. Man kann deshalb die gleiche Eichfixierung vornehmen wie im kommutativen Fall. Tut man dieses, nachdem die nichtkommutative Lagrangedichte durch kommutative Größen (durch SWMs) mit dem gewöhnlichen Punktprodukt ausgedrückt wurde, so führt die Eichfixierung zu denselben Geistfeldern und zu keinen zusätzlichen Geist- bzw. Geist-Eichboson-Wechselwirkungen, als zu denjenigen, die im SM auftreten.
In dem hier betrachteten Prozess können nur die s-Kanäle zu Beiträgen mit Geistern führen. Da es aber nur die (aufgrund des Sternprodukts abgeänderten) SM-Geist-Wechselwirkungen gibt, sind Kopplungen zwischen unterschiedlichen Geistern auch im nichtkommutativen Fall nicht erlaubt. Der Prozess enthält im Endzustand unterschiedliche Eichbosonen (ein Z und ein Photon), daher ist es nicht möglich, ein entsprechendes Diagramm mit den Geistern zu betrachten. Dieses ist aber auch nicht notwendig, denn es werden auch keine Eichbosonen mit unphysikalischen Polarisationszuständen erzeugt, wie am Ende dieses Kapitels deutlich wird.
Es soll nun gezeigt werden, dass die im Abschnitt 5.1 aufgestellten Amplituden die Ward-Identität erfüllen.

Der mathematische Ausdruck für die Ward-Identität für den Fall, dass sich alle externen Teilchen auf der Massenschale (on-shell) befinden, ist durch

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\langle 0|\mathrm{T}A^\mu(x)\Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)\cdots\Phi_n(x_n)|0\rangle_{\text{amputiert, on-shell}} = 0 \tag{5.13}$$

gegeben. Dabei bezeichnet A^μ das betrachtete Eichfeld, und Φ_i die restlichen Materie- oder Eichfelder mit physikalischen Polarisationen, die am Prozess teilnehmen. Diagrammatisch kann man (5.13) im Impulsraum folgendermaßen veranschaulichen:

k^μ 

$= 0.$

Um die Gültigkeit der Ward-Identität konkret zu testen, geht man in den Impulsraum über. Die Vorgehensweise wird direkt anhand des hier untersuchten Prozesses $q\bar{q} \to Z\gamma$ beschrieben.
Mit der Bezeichnung

$$\mathrm{i}\mathcal{M} = \mathrm{i}\mathcal{M}_t + \mathrm{i}\mathcal{M}_u + \mathrm{i}\mathcal{M}_{s/Z} + \mathrm{i}\mathcal{M}_{s/\gamma} + \mathrm{i}\mathcal{M}_4 = \mathrm{i}\mathcal{M}^{\mu\nu}\varepsilon_{1\nu}(k_1)\varepsilon_{2\mu}(k_2) \tag{5.14}$$

sind folgende Ausdrücke eine zu (5.13) äquivalente Umformung der Ward-Identität im Impulsraum, angewandt auf den speziellen Fall $q\bar{q} \to Z\gamma$:

$$\begin{aligned} \text{WI für das } Z: \quad & k_{1\nu} \cdot [\mathrm{i}\mathcal{M}^{\mu\nu}\varepsilon_{2\mu}(k_2)] = 0, \\ \text{WI für das } \gamma: \quad & k_{2\mu} \cdot [\mathrm{i}\mathcal{M}^{\mu\nu}\varepsilon_{1\nu}(k_1)] = 0. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Diese Identitäten gelten nur dann, wenn alle anderen externen Teilchen auf der Massenschale liegen. Dass (5.15) gilt, wird im folgenden Abschnitt gezeigt. Da die Rechnungen für die WI für das Photon und für das Z-Boson ähnlich verlaufen, wird nur der Fall des Photons im Folgenden betrachtet.

Zunächst wird die WI für den kommutativen Prozess gezeigt, bei dem nur zwei Diagramme zur Gesamtamplitude beitragen. Die entsprechenden Amplituden erhält man, indem man in den Ausdrücken (5.4) und (5.5) den NC-Parameter θ gleich Null setzt, da der kommutative Fall sich als Grenzfall $\theta \to 0$ aus dem nichtkommutativen ergeben muss. Man hat also folgende Teilamplituden:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\mathcal{M}_t^{\mathrm{SM}} &= \mathrm{i}\mathcal{M}_t(\theta = 0) = C\bar{v}(p_2)(g_V + g_A\gamma^5)\not{\varepsilon}_2 \frac{1}{\not{k}_2 - \not{p}_2}\not{\varepsilon}_1\; u(p_1)\,, \\ \mathrm{i}\mathcal{M}_u^{\mathrm{SM}} &= \mathrm{i}\mathcal{M}_u(\theta = 0) = C\bar{v}(p_2)(g_V + g_A\gamma^5)\not{\varepsilon}_1 \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k}_2}\not{\varepsilon}_2\; u(p_1)\,. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Der Einfachheit halber wurde für die Vorfaktoren folgende Notation eingeführt:

$$C = -\mathrm{i}Q_q e \frac{g}{2\cos\theta_W}\,.$$

Nun wird der Polarisationsvektor des Photons durch seinen Impuls ersetzt:

$$\begin{aligned} &\left(\mathrm{i}\mathcal{M}_t^{\mathrm{SM}} + \mathrm{i}\mathcal{M}_u^{\mathrm{SM}}\right)(\varepsilon_{2\mu} \to k_{2\mu}) = \\ &\qquad C\;\bar{v}(p_2)(g_V + g_A\gamma^5)\left[\not{k}_2 \frac{1}{\not{k}_2 - \not{p}_2}\not{\varepsilon}_1 + \not{\varepsilon}_1 \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k}_2}\not{k}_2\right]\; u(p_1)\,. \end{aligned}$$

Da alle externen Teilchen auf der Massenschale liegen, gilt die Dirac-Gleichung für das Quark bzw. Antiquark im masselosen Grenzfall:

$$\not{p}_1 u(p_1) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \bar{v}(p_2)\not{p}_2 = 0. \tag{5.17}$$

Deshalb kann man weiterhin schreiben:

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{i}\mathcal{M}_t^{\mathrm{SM}} + \mathrm{i}\mathcal{M}_u^{\mathrm{SM}}\right)(\varepsilon_{2\mu} \to k_{2\mu}) &= C\ \bar{v}(p_2)(g_V + g_A\gamma^5) \\ &\cdot \left[(\not{k}_2 - \not{p}_2)\frac{1}{\not{k}_2 - \not{p}_2}\not{\varepsilon}_1 + \not{\varepsilon}_1\frac{1}{\not{p}_1 - \not{k}_2}(\not{k}_2 - \not{p}_1)\right]\ u(p_1) \\ &= C\ \bar{v}(p_2)(g_V + g_A\gamma^5)\left[\not{\varepsilon}_1 - \not{\varepsilon}_1\right]\ u(p_1) = 0,\end{aligned} \tag{5.18}$$

Man sieht also, dass die Ward-Identität erfüllt ist.
In derselben Art und Weise verfährt man auch im nichtkommutativen Fall. Da hier die Vertexfunktionen zusätzliche θ-abhängige Terme enthalten, wird die Summe zwischen den t- und den u-Kanal-Amplituden mit $\varepsilon_{2\mu} \to k_{2\mu}$ nicht mehr Null sein:

$$\begin{aligned}(\mathrm{i}\mathcal{M}_t + \mathrm{i}\mathcal{M}_u)(\varepsilon_{2\mu} \to k_{2\mu}) &= C\ \bar{v}(p_2)(g_V + g_A\gamma^5) \\ &\cdot \left[\frac{k_1\theta p_1}{2}\not{\varepsilon}_1 + \frac{p_1\theta\varepsilon_1}{2}\not{k}_1 - \frac{p_2\theta k_1}{2}\not{\varepsilon}_1 + \frac{p_2\theta\varepsilon_1}{2}\not{k}_1\right]\ u(p_1) \\ = C\ \bar{v}(p_2)(g_V + g_A\gamma^5) &\left[\frac{k_1\theta(p_1+p_2)}{2}\not{\varepsilon}_1 + \frac{(p_1+p_2)\theta\varepsilon_1}{2}\not{k}_1\right]\ u(p_1)\,.\end{aligned} \tag{5.19}$$

Für die letzte Umformung wurde die Antisymmetrie der θ-Matrix benutzt: $p_2\theta k_1 = -k_1\theta p_2$.
Damit die Ward-Identität nicht verletzt wird, muss es ein weiteres Diagramm geben, welches diesen von Null verschiedenen Term weghebt. Die einzige Amplitude, die dieses gewährleisten kann, ist die Kontaktterm-Amplitude $\mathrm{i}\mathcal{M}_4$. Die s-Kanal-Amplituden kommen dafür nicht in Betracht, da sie proportional zu $K_{ZZ\gamma}$ bzw. zu $K_{Z\gamma\gamma}$ sind. Wie in Abschnitt 4.2 gezeigt wurde, haben diese Kopplungen in der nichtkommutativen Erweiterung des SMs, die hier vorgestellt wird, jedoch keinen festen Wert, sondern sind innerhalb eines festgelegten Bereichs variabel. Deshalb wird es schon aufgrund der Vorfaktoren nicht möglich sein, dass die s-Kanal-Amplituden Beiträge liefern, die den Term (5.19) wegheben.
Ersetzt man in (5.8) den Polarisationsvektor durch den entsprechenden Impuls, erhält man:

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\mathcal{M}_4(\varepsilon_{2\mu} \to k_{2\mu}) = C\bar{v}(p_2)(g_V + g_A\gamma^5)&\left[\frac{k_2\theta k_2}{2}\not{\varepsilon}_1 + \frac{k_2\theta\varepsilon_1}{2}\not{k}_2 - \right. \\ &\left. - \frac{k_2\theta\varepsilon_1}{2}\not{k}_2 + \frac{k_1\theta\varepsilon_1}{2}\not{k}_2 + \frac{\varepsilon_1\theta k_2}{2}\not{k}_1 - \frac{k_1\theta k_2}{2}\not{\varepsilon}_1\right] u(p_1) \\ = C\bar{v}(p_2)(g_V + g_A\gamma^5)&\left[\frac{k_1\theta\varepsilon_1}{2}\not{k}_2 + \frac{\varepsilon_1\theta k_2}{2}\not{k}_1 - \frac{k_1\theta k_2}{2}\not{\varepsilon}_1\right] u(p_1),\end{aligned} \tag{5.20}$$

wobei $k_2\theta k_2 = 0$ ausgenutzt wurde. Nach einigen Umformungen unter Verwendung der Impulserhaltung $p_1 + p_2 = k_1 + k_2$ und der Antisymmetrie von $\theta^{\mu\nu}$ wird (5.20) zu

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\mathcal{M}_4(\varepsilon_{2\mu} \to k_{2\mu}) = -C\ \bar{v}(p_2)(g_V + g_A\gamma^5) \\ \cdot \left[\frac{k_1\theta(p_1+p_2)}{2} \not{\varepsilon}_1 + \frac{(p_1+p_2)\theta\varepsilon_1}{2} \not{k}_1 \right] u(p_1)\,. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Vergleicht man nun (5.19) mit (5.21) so stellt man fest, dass

$$(\mathrm{i}\mathcal{M}_t + \mathrm{i}\mathcal{M}_u)\,(\varepsilon_{2\mu} \to k_{2\mu}) = -\mathrm{i}\mathcal{M}_4(\varepsilon_{2\mu} \to k_{2\mu}) \tag{5.22}$$

gilt. Es muss nur noch gezeigt werden, dass die beiden s-Kanal-Amplituden jeweils einzeln Null ergeben, wenn man die Ersetzung $\varepsilon_{2\mu} \to k_{2\mu}$ durchführt. Da die Amplituden (5.6) und (5.7) abgesehen von den Vorfaktoren dieselbe Struktur haben, ist es ausreichend, die WI nur für eine der beiden Amplituden zu zeigen:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\mathcal{M}_{s/\gamma}(\varepsilon_{2\mu} \to k_{2\mu}) = 2\mathrm{i}Q_q e^2 \sin(2\theta_W) K_{Z\gamma\gamma} \frac{1}{q_s^2} \\ \cdot \bar{v}(p_2)\ \mathcal{V}_s^\theta(\varepsilon_{2\mu} \to k_{2\mu})\ u(p_1), \end{aligned} \tag{5.23}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_s^\theta(\varepsilon_{2\mu} \to k_{2\mu}) = [&k_1\theta\varepsilon_1(q_sk_2)\not{k}_2 + q_s\theta\gamma(k_1k_2)(\varepsilon_1k_2) + k_2\theta k_2(q_sk_1)\not{\varepsilon}_1 \\ &- k_1\theta\varepsilon_1(q_sk_2)\not{k}_2 - k_2\theta k_2(q_s\varepsilon_1)\not{k}_1 - q_s\theta\gamma(k_2\varepsilon_1)(k_1k_2) \\ &- k_2\theta\varepsilon_1(q_sk_2)\not{k}_1 - \varepsilon_1\theta k_2(q_sk_1)\not{k}_2 - k_2\theta\gamma(k_1k_2)(q_s\varepsilon_1) \\ &- \gamma\theta k_2(q_sk_1)(k_2\varepsilon_1) - \gamma\theta\varepsilon_1(q_sk_2)(k_1k_2) - \varepsilon_1\theta\gamma(k_1k_2)(q_sk_2) \\ &+ k_2\theta k_1(q_sk_2)\not{\varepsilon}_1 + \varepsilon_1\theta k_2(q_sk_1)\not{k}_2 + k_2\theta q_s(k_1k_2)\not{\varepsilon}_1 \\ &+ \gamma\theta k_2(q_sk_1)(\varepsilon_1k_2) + \gamma\theta k_1(q_sk_2)(\varepsilon_1k_2) + \varepsilon_1\theta q_s(k_1k_2)\not{k}_2 \\ &+ k_2\theta\varepsilon_1(q_sk_2)\not{k}_1 + k_1\theta k_2(q_s\varepsilon_1)\not{k}_2 + k_2\theta\gamma(k_1k_2)(q_s\varepsilon_1) \\ &+ q_s\theta k_2(k_2\varepsilon_1)\not{k}_1 + q_s\theta\varepsilon_1(k_1k_2)\not{k}_2 + k_1\theta\gamma(k_2\varepsilon_1)(q_sk_2) \\ &- k_2\theta k_1(q_sk_2)\not{\varepsilon}_1 - k_1\theta k_2(q_s\varepsilon_1)\not{k}_2 - k_2\theta q_s(k_1k_2)\not{\varepsilon}_1 \\ &- q_s\theta k_2(\varepsilon_1k_2)\not{k}_1 - q_s\theta k_1(\varepsilon_1k_2)\not{k}_2 - k_1\theta q_s(k_2\varepsilon_1)\not{k}_2]\,. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Untersucht man den obigen Ausdruck sorgfältig und beachtet, dass $q_s = k_1 + k_2$ gilt, so sieht man, dass sich alle Terme wegheben: $\mathcal{V}_s^\theta(\varepsilon_{2\mu} \to k_{2\mu}) = 0$. Dieses Ergebnis war schon aufgrund der Form der Wechselwirkungsterme in der Lagrangedichte (A.6b) bzw. (A.6c) zu erwarten. Diese enthält nämlich nur Terme der Form $F_Z^{\mu\nu}$ bzw. $F_A^{\mu\nu}$, mit

$$F_Z^{\mu\nu} = \partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu \quad \text{bzw.} \quad F_A^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.$$

Solche Ausdrücke führen zu Vertexfunktionen, welche, kontrahiert mit den äußeren Polarisationsvektoren, Terme folgender Form liefern:

$$V_{Z,A}^{\mu\nu} = -\mathrm{i}(k^\mu\varepsilon^\nu - k^\nu\varepsilon^\mu).$$

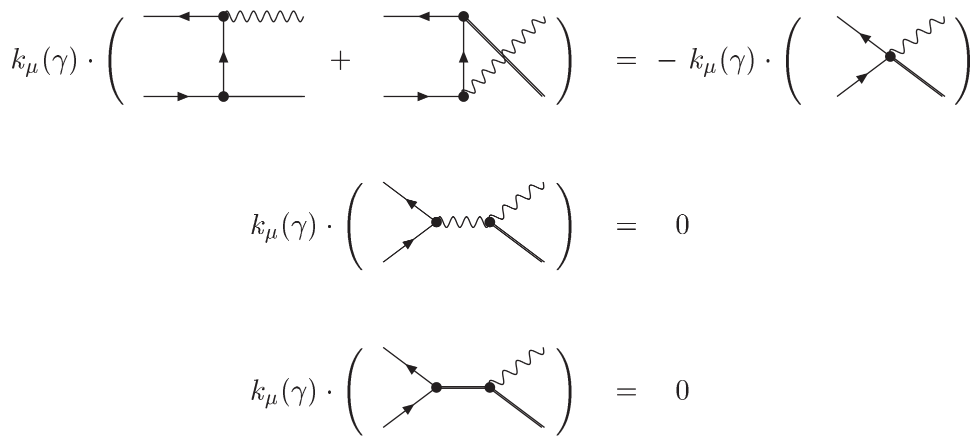
Ersetzt man nun den Polarisationsvektor durch den Impuls, so erhält man sofort Null:

$$V^{\mu\nu}_{Z,A}(\varepsilon \to k) = -\mathrm{i}(k^\mu k^\nu - k^\nu k^\mu) = 0.$$

Hiermit wurde die Ward-Identität auch für die beiden s-Kanal-Amplituden bewiesen :

$$\mathrm{i}\mathcal{M}_{s/Z}(\varepsilon_{2\mu} \to k_{2\mu}) = 0, \tag{5.25}$$
$$\mathrm{i}\mathcal{M}_{s/\gamma}(\varepsilon_{2\mu} \to k_{2\mu}) = 0. \tag{5.26}$$

Gleichungen (5.22), (5.25) und (5.26) können diagrammatisch folgendermaßen veranschaulicht werden:



Fasst man die Ergebnisse (5.22), (5.25) und (5.26) zusammen, so erhält man die Ward-Identität für das Photon, deren Gültigkeit hiermit auch für den nichtkommutativen Prozess bestätigt wird:

$$\mathrm{i}\mathcal{M}(\varepsilon_{2\mu} \to k_{2\mu}) = 0 \tag{5.27}$$

Dasselbe gilt auch, wenn man den Polarisationsvektor des Z-Bosons $\varepsilon_{1\nu}$ durch den entsprechenden Impuls k_1 ersetzt:

$$\mathrm{i}\mathcal{M}(\varepsilon_{1\nu} \to k_{1\nu}) = 0\,. \tag{5.28}$$

An dem Beweis der WI ist zusätzlich ersichtlich, dass die Gesamtamplitude sogar dann verschwindet, wenn *beide* Endteilchen (sowohl das Z als auch das Photon) unphysikalisch gemacht werden, d.h. wenn in der Gesamtamplitude gleichzeitig sowohl $\varepsilon_{2\mu} \to k_{2\mu}$, als auch $\varepsilon_{1\nu} \to k_{1\nu}$ substituiert werden:

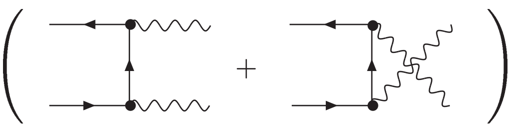
$$k_{1\nu} k_{2\mu} \cdot (\mathrm{i}\mathcal{M}^{\mu\nu}) = 0. \tag{5.29}$$

Für den Beweis der Identitäten (5.27) und (5.28) wurden weder die Massenschalenbedingung $k_1^2 = m_Z^2$ bzw. $k_2^2 = 0$ noch die Transversalitätsbedingung $k_1\varepsilon_1 = 0$ bzw. $k_2\varepsilon_2 = 0$ benötigt. Es werden also keine unphysikalischen Teilchen produziert, und folglich müssen auch keine Geist-Diagramme berücksichtigt werden, so dass die Amplituden (5.4)-(5.8) sämtliche Amplituden sind, die zum Prozess $q\bar{q} \to Z\gamma$ in NCQFT beitragen. Außerdem kann dadurch im Betragsquadrat der Gesamtamplitude die Summation über die Polarisationsvektoren der Endteilchen durch den metrischen Tensor gemäß

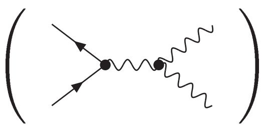
$$\sum_{\text{Polarisationen}} \varepsilon_\mu^* \varepsilon_\nu \quad \to \quad -g_{\mu\nu} \tag{5.30}$$

ersetzt werden.

Zum Schluss soll noch ein Vergleich mit dem Sachverhalt in der kommutativen QCD aufgestellt werden. Denn die WI, beispielsweise für die Paarvernichtung in zwei Gluonen, wird in der QCD des SMs auf eine andere Weise erfüllt als im bisher betrachteten nichtkommutativen Fall. Der erwähnte QCD-Prozess ist durch drei Diagramme gegeben: s-, t- und u-Kanal. Betrachtet man zunächst die Summe der t- und u-Kanal-Amplituden und ersetzt den Polarisationsvektor des einen Gluons durch den entsprechenden Impuls, so ergibt sich ein Ausdruck, welcher proportional zum Kommutator der QCD-Generatoren ist:

$k_\mu \cdot$  $\propto [T^a, T^b] = \mathrm{i} f_c^{ab} T^c$

Die WI verlangt somit ein drittes Diagramm, das die Gruppenindexstruktur eines Fermion-Eichboson-Vertexes ($\propto T^c$) mal einem Drei-Eichbosonen-Vertex ($\propto f_c^{ab}$) aufweisen muss. Der s-Kanal Beitrag liefert die gewünschte Struktur:

$k_\mu \cdot$  $\propto -\mathrm{i} f_c^{ab} T^c$

Damit die WI erfüllt wird, *muss* zusätzlich das andere Gluon auf der Massenschale liegen und transversal polarisiert sein – eine Forderung, die im nichtkommutativen Fall für die Erfüllung der WI nicht gestellt werden muss. Folglich müssen im QCD-Prozess zusätzliche Geist-Diagramme berücksichtigt werden, was für den nichtkommutativen Prozess nicht notwendig ist, wie oben gezeigt wurde. Die Forderung nach physikalischen externen Teilchen (Fermionen *und* Eichbosonen) und die Lie-Algebra-Struktur sorgen also in der kommutativen QCD für die Gültigkeit der WI, während im NCSM dieses von der richtigen Kombination von θ-abhängigen Faktoren gewährleistet wird.
Während im kommutativen SM die Erfüllung der WI eine Folge der gewöhnlichen, kommutativen Eichinvarianz ist, wird im nichtkommutativen Fall deren Gültigkeit durch die Invarianz der NC-Theorie sowohl unter kommutativen als auch unter nichtkommutativen Eichtransformationen gesichert.

5.3 Differentieller Wirkungsquerschnitt

In diesem Abschnitt werden die differentiellen Wirkungsquerschnitte (diff. WQ) für den partonischen Prozess $q\bar{q} \to Z\gamma$ berechnet. In Abschnitt 5.1 wurden

zunächst die Amplituden in erster Ordnung θ aufgestellt, während in Abschnitt 5.2 gezeigt wurde, dass sie die Ward-Identität erfüllen. Dadurch wurde gleichzeitig ihre Konsistenz überprüft und es kann nun mit der Berechnung des Amplitudenquadrates begonnen werden.
Die Gesamtamplitude für den nichtkommutativen Prozess $q\bar{q} \rightarrow Z\gamma$ setzt sich aus der Summe der Teilamplituden (5.4) - (5.8) zusammen:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_t + \mathcal{M}_u + \mathcal{M}_{s/Z} + \mathcal{M}_{s/\gamma} + \mathcal{M}_4 \tag{5.31}$$

Nun muss das Betragsquadrat gebildet werden, wobei die Tatsache berücksichtigt werden muss, dass die gesamte Rechnung linear in θ durchgeführt wird und quadratische Terme in θ daher nicht mitgenommen werden dürfen. Somit entfallen sowohl die Betragsquadrate der im SM komplett verbotenen Diagramme $|\mathcal{M}_{s/Z}|^2, |\mathcal{M}_{s\gamma}|^2, |\mathcal{M}_4|^2$ als auch die Interferenzterme zwischen ihnen:

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_t|^2 + |\mathcal{M}_u|^2 + &\overbrace{|\mathcal{M}_{s/Z}|^2 + |\mathcal{M}_{s/\gamma}|^2 + |\mathcal{M}_4|^2}^{\text{Terme} \propto \theta^2} \\ &+ \ 2\,\mathcal{R}e\big(\mathcal{M}_t\mathcal{M}_u^* + \mathcal{M}_t\mathcal{M}_{s/Z}^* + \mathcal{M}_t\mathcal{M}_{s/\gamma}^* + \\ &+ \mathcal{M}_t\mathcal{M}_4^* + \mathcal{M}_u\mathcal{M}_{s/Z}^* + \mathcal{M}_u\mathcal{M}_{s/\gamma}^* + \mathcal{M}_u\mathcal{M}_4^* + \\ &+ \underbrace{\mathcal{M}_{s/Z}\mathcal{M}_{s/\gamma}^* + \mathcal{M}_{s/Z}\mathcal{M}_4^* + \mathcal{M}_{s/\gamma}\mathcal{M}_4^*}_{\text{Terme} \propto \theta^2}\big)\,. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Die Berechnung der einzelnen Terme ist zwar aufwendig, aber nicht weiter schwierig. Man verfährt dabei nach den üblichen Methoden. Die Vorgehensweise soll im Folgenden anhand des ersten Terms in (5.32) vorgeführt werden. Um $|\mathcal{M}_t|^2$ ausrechnen zu können, braucht man den komplexkonjugierten Ausdruck der Amplitude (5.4):

$$\begin{aligned}(\mathrm{i}\mathcal{M}_t)^* = \mathrm{i}Q_q e \frac{g}{2\cos\theta_W}\frac{1}{q_t^2}\bar{u}(p_1)(g_V + g_A\gamma^5) \\ \cdot \left(\not{\epsilon}_1^* + \frac{k_1\theta p_1}{2}\not{\epsilon}_1^* + \frac{p_1\theta\epsilon_1^*}{2}\not{k}_1\right)\not{q}_1\left(\not{\epsilon}_2^* + \frac{p_2\theta k_2}{2}\not{\epsilon}_2^* - \frac{p_2\theta\epsilon_2^*}{2}\not{k}_2\right)v(p_2)\end{aligned} \tag{5.33}$$

Das über die Spins, Polarisationen und Quarkfarben summierte Betragsquadrat lässt sich nun mit

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}_t|^2 = \frac{1}{12}\sum_{\substack{\text{Spins,Farben,}\\ \text{Polaris.}}}\mathrm{i}\mathcal{M}_t(\mathrm{i}\mathcal{M}_t)^* = \frac{1}{12}\sum_{\substack{\text{Spins,Farben,}\\ \text{Polaris.}}}Q_q^2e^2\frac{g^2}{(2\cos\theta_W)^2}\frac{1}{q_t^4} \\ \bar{v}(p_2)(g_V + g_A\gamma^5)\left(\not{\varepsilon}_2 + \frac{p_2\theta k_2}{2}\not{\varepsilon}_2 - \frac{p_2\theta\varepsilon_2}{2}\not{k}_2\right) \\ \not{q}_t\left(\not{\varepsilon}_1 + \frac{k_1\theta p_1}{2}\not{\varepsilon}_1 + \frac{p_1\theta\varepsilon_1}{2}\not{k}_1\right)u(p_1)\bar{u}(p_1)(g_V + g_A\gamma^5) \\ \left(\not{\varepsilon}_1^* + \frac{k_1\theta p_1}{2}\not{\varepsilon}_1^* + \frac{p_1\theta\varepsilon_1^*}{2}\not{k}_1\right)\not{q}_t\left(\not{\varepsilon}_2^* + \frac{p_2\theta k_2}{2}\not{\varepsilon}_2^* - \frac{p_2\theta\varepsilon_2^*}{2}\not{k}_2\right)v(p_2)\end{aligned} \tag{5.34}$$

berechnen. Der Faktor 1/12 ergibt sich aus der Mittelung über die Spins und über die Farbladungen N_C der einlaufenden Quarks und anschließenden Summation über die Farbladung:

$$\frac{1}{12} = N_C \left(\frac{1}{2}\frac{1}{N_C}\right)^2 \;, \quad \text{mit} \quad N_C = 3\,.$$

Dieser Faktor berücksichtigt die Normierung der partonischen Verteilungsfunktionen, mit denen im nächsten Kapitel der hadronische Wirkungsquerschnitt berechnet wird. Führt man die Summation über die Spins der ein- und auslaufenden Quarks gemäß

$$\begin{aligned} \sum_s u^s(p)\bar{u}^s(p) &= \not{p} + m \stackrel{m\to 0}{\longrightarrow} \not{p} \\ \sum_s v^s(p)\bar{v}^s(p) &= \not{p} - m \stackrel{m\to 0}{\longrightarrow} \not{p} \end{aligned} \tag{5.35}$$

aus und ersetzt die Summation über die Polarisationsvektoren (Feynman-Eichung: $\xi = 1$) durch den metrischen Tensor

$$\sum_{\text{Polarisationen}} \varepsilon_\mu^* \varepsilon_\nu \quad \to \quad -g_{\mu\nu}, \tag{5.36}$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_t|^2 = \frac{Q_q^2 e^2}{12} \frac{g^2}{(2\cos\theta_W)^2} \frac{1}{q_t^4} \mathrm{Tr}\,\Big[& (g_V^2 + g_A^2 + 2 g_V g_A \gamma^5) \\ & \not{p}_2 \left(\gamma^\mu + \frac{p_2\theta k_2}{2}\gamma^\mu - \frac{p_2\theta^\mu}{2}\not{k}_2\right) \not{q}_t \left(\gamma^\nu + \frac{k_1\theta p_1}{2}\gamma^\nu + \frac{p_1\theta^\nu}{2}\not{k}_1\right) \\ & \not{p}_1 \left(\gamma_\nu + \frac{k_1\theta p_1}{2}\gamma_\nu + \frac{p_1\theta_\nu}{2}\not{k}_1\right) \not{q}_t \left(\gamma_\mu + \frac{p_2\theta k_2}{2}\gamma_\mu - \frac{p_2\theta_\mu}{2}\not{k}_2\right)\Big]\,. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Jetzt muss die Spur über die γ-Matrizen in (5.37) ausgewertet werden. Die Spur über den kommutativen Anteil hat die Form

$$\mathrm{Tr}\,\left[(g_V^2 + g_A^2 + 2 g_V g_A \gamma^5)\not{p}_2\gamma^\mu\not{q}_t\gamma^\nu\not{p}_1\gamma_\nu\not{q}_t\gamma_\mu\right]\,.$$

Mit Hilfe der Spurtheoreme aus Anhang C kann man den Ausdruck wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}[(g_V^2 + g_A^2 + 2 g_V g_A \gamma^5)\not{p}_2 \underbrace{\gamma^\mu\not{q}_t\gamma^\nu\not{p}_1\gamma_\nu\not{q}_t\gamma_\mu}_{4\not{q}_t\not{p}_1\not{q}_t}] &= \\ = 4\mathrm{Tr}\{(g_V^2 + g_A^2 + 2 g_V g_A \gamma^5)[(2p_1q_t - q_t^2)\not{p}_2\not{q}_t]\} &= \\ = 16(g_V^2 + g_A^2)(p_2q_t)(2p_1q_t - q_t^2) & \end{aligned} \tag{5.38}$$

Die Spur über den Term, der die γ^5-Matix enthält, ergibt Null, da es sich in diesem Fall um eine Spur der Form $\mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu) = 0$ handelt.

Betrachtet man Spuren, die γ^5 enthalten und in denen die $\theta^{\mu\nu}$-Matrix mit einem Impuls und einer γ-Matrix kontrahiert wird, so verschwinden diese nicht. Dies sei z. B. an dem Term

$$2g_V g_A \mathrm{Tr}(\gamma^5 \not{p}_2 \gamma^\mu \not{q}_t \frac{p_1\theta_\nu}{2} \gamma^\nu \not{p}_1 \not{k}_1 \not{q}_t \gamma_\mu). \tag{5.39}$$

aus (5.37) verdeutlicht. Die Kontraktion der $\theta_{\mu\nu}$-Matrix mit *einem* Impuls p^μ kann wie ein Viererverktor $p\theta_\nu$ behandelt werden. Dieses geschieht rein formal, da $\theta^{\mu\nu}$ eine relle (antisymmetrische) Matrix und kein Lorentz-Tensor ist. Die Spur (5.39) ergibt:

$$-2\mathrm{i} g_V g_A \left[4q_t^2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q_t^\mu p_1 \theta^\nu p_1^\rho k_1^\sigma + 8(p_2 q_t)\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_2^\mu p_1 \theta^\nu p_1^\rho k_1^\sigma\right] \neq 0\,. \tag{5.40}$$

Es gibt aber in (5.37) eine weitere Spur:

$$2g_V g_A \mathrm{Tr}(\gamma^5 \not{p}_2 \gamma^\mu \not{q}_t \not{k}_1 \not{p}_1 \frac{p_1\theta_\nu}{2} \gamma^\nu \not{q}_t \gamma_\mu),$$

deren Ergebnis den Ausdruck (5.40) mit entgegengesetztem Vorzeichen wiedergibt, so dass insgesamt alle Terme proportional zu $g_V g_A$ wegfallen. Ähnliches gilt für $|\mathcal{M}_u|^2$, so dass man auch hier in der Klammer $(g_V^2 + g_A^2 + 2g_V g_A \gamma^5)$ den letzten Term einfach weglassen kann.
Auch im Fall der Interferenzterme verschwinden die Ausdrücke proportional zu $g_V g_A$. Hier fallen sie jedoch weg, weil sie mit einem zusätzlichen i-Faktor auftreten. Bildet man dann die Summe $(\mathrm{i}\mathcal{M}_t)(\mathrm{i}\mathcal{M}_u)^* + (\mathrm{i}\mathcal{M}_t)^*(\mathrm{i}\mathcal{M}_u)$, so hebt sich der Imaginärteil gerade weg. Am Ende dieses Kapitels wird sich herausstellen, dass im differentiellen nichtkommutativen Wirkungsquerschnitt eine Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie auftritt, im Gegensatz zum SM-Wirkungsquerschnitt. Es wurde an dieser Stelle so ausführlich auf die Tatsache eingegangen, dass im Amplitudenquadrat keine $g_V g_A$-Terme auftauchen, um zu betonen, dass die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie im differentiellen nichtkommutativen WQ nicht auf solche Terme zurückgeführt werden kann, wie man es z. B. aus dem SM-Prozess $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ kennt. Sie ist, wie gleich gezeigt wird, auf ganz andere Ursachen zurückzuführen.

Um den Ausdruck für das Amplitudenquadrat einfacher und übersichtlicher schreiben zu können, ist es sinnvoll, die Mandelstam-Variablen einzuführen:

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (k_1 + k_2)^2 = \ \ 2p_1p_2 = m_Z^2 + 2k_1k_2 \\ t &= (p_1 - k_1)^2 = (k_2 - p_2)^2 = -2k_2p_2 = m_Z^2 - 2p_1k_1 \\ u &= (p_1 - k_2)^2 = (k_1 - p_2)^2 = -2p_1k_2 = m_Z^2 - 2k_1p_2 \end{aligned} \tag{5.41}$$

Damit erhält man für das Betragsquadrat der Gesamtamplitude:

$$\begin{aligned} &|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_t|^2 + |\mathcal{M}_u|^2 + \\ &2\,\mathcal{R}e\big(\mathcal{M}_t\mathcal{M}_u^* + \mathcal{M}_t\mathcal{M}_{s/Z}^* + \mathcal{M}_t\mathcal{M}_{s/\gamma}^* + \mathcal{M}_t\mathcal{M}_4^* + \mathcal{M}_u\mathcal{M}_{s/Z}^* + \mathcal{M}_u\mathcal{M}_{s/\gamma}^* + \mathcal{M}_u\mathcal{M}_4^*\big)\,, \end{aligned} \tag{5.42}$$

wobei die einzelnen Beiträge durch folgende Ausdrücke gegeben sind:

$$|\mathcal{M}_t|^2 = C_1 \left\{ 8\frac{u}{t} - 4\left[p_1\theta(k_1+k_2)\left(\frac{u}{t}+1\right) - k_1\theta k_2\left(\frac{s}{t}+2\frac{u}{t}\right)\right]\right\}, \tag{5.43a}$$

$$|\mathcal{M}_u|^2 = C_1 \left\{ 8\frac{t}{u} - 4\left[p_1\theta(k_1+k_2)\left(\frac{t}{u}+1\right) + k_1\theta k_2\left(\frac{s}{u}+2\frac{t}{u}\right)\right]\right\}, \tag{5.43b}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_t\mathcal{M}_u^* = C_1 \Bigg\{ 8m_Z^2\frac{s}{tu} - p_1\theta(k_1+k_2)\Bigg[12\frac{s}{u} + 12\frac{s}{t} + 8\frac{s^2}{tu} + \\ +2\frac{t}{u} + 2\frac{u}{t} - 4\Bigg] + k_1\theta k_2\left[2\frac{s}{t} - 2\frac{s}{u}\right]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{5.43c}$$

Dabei wurde die Abkürzung

$$C_1 = \frac{1}{12}\frac{Q_q^2 e^2 g^2}{(2\cos\theta_W)^2}(g_V^2+g_A^2) = \frac{\pi^2}{3}\frac{Q_q^2\alpha^2}{\sin^2\theta_W\cos^2\theta_W}(g_V^2+g_A^2) \tag{5.44}$$

verwendet, mit $g = e/\sin\theta_W$ und $\alpha = e^2/(4\pi)$.
Betrachtet man zunächst die Summe dieser drei Terme (das entspricht einem Amplitudenquadrat, zu dem nur ein t- und u-Kanal beitragen), so sieht man, dass sie invariant unter dem Austausch $k_1 \leftrightarrow k_2$ der Impulse der auslaufenden Teilchen ist. Wird der Austausch $k_1 \leftrightarrow k_2$ vorgenommen, so folgt damit:

$$t \leftrightarrow u \quad \text{und} \quad (k_1\theta k_2 = -k_2\theta k_1) \leftrightarrow (-k_1\theta k_2 = k_2\theta k_1)\,.$$

Mit anderen Worten: berechnet man den differentiellen Wirkungsquerschnitt (nichtkommutativ) nur unter Berücksichtigung des t- und u-Kanal-Beitrages, so wird keine Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie auftreten und die Endteilchen werden mit derselben Wahrscheinlichkeit vorwärts wie rückwärts gestreut.
Nimmt man nun den Kontaktterm-Beitrag, bzw. die Interferenzterme zwischen Kontaktterm und jeweils t- und u-Kanal,

$$\mathcal{M}_t\mathcal{M}_4^* = 4C_1\left[k_1\theta p_1\left(\frac{s}{t}+\frac{u}{t}+2\right) + k_2\theta k_1\left(\frac{s}{t}+\frac{u}{t}\right) + k_2\theta p_1\right], \tag{5.45a}$$

$$\mathcal{M}_u\mathcal{M}_4^* = 4C_1\left[k_1\theta p_1\left(\frac{s}{u}+2\frac{t}{u}+2\right) + k_2\theta k_1 + k_2\theta p_1\right], \tag{5.45b}$$

hinzu, so geht dadurch die Symmetrie bezüglich des Impulsaustausches $k_1 \leftrightarrow k_2$ verloren. Dies ist der Grund für die auftretende Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie, die am Ende des Kapitels im differentiellen Wirkungsquerschnitt für den nichtkommutativen Prozess zu sehen sein wird.
Folgende Beiträge zum Amplitudenquadrat müssen noch betrachtet werden:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_t\mathcal{M}_{s/Z}^* = -2C_2K_{ZZ\gamma}\frac{1}{s-m_Z^2}\Bigg[p_1\theta k_1\left(4\frac{us}{t}+2\frac{u^2}{t}+3u-t\right) \\ +p_1\theta k_2\left(2\frac{us}{t}+2s+3u+t\right) + k_1\theta k_2\left(4\frac{us}{t}+2\frac{u^2}{t}+4\frac{s^2}{t}-s-2u\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{5.46a}$$

$$\mathcal{M}_u\mathcal{M}^*_{s/Z} = -2C_2K_{ZZ\gamma}\frac{1}{s-m_Z^2}\left[p_1\theta k_1\left(4\frac{st}{u}+2\frac{t^2}{u}+3t+u\right)\right.$$
$$\left.+p_1\theta k_2\left(2\frac{st}{u}+2s+3t+u\right)-k_1\theta k_2\left(2\frac{st}{u}+4\frac{s^2}{u}+3s-2t+2u\right)\right] \quad (5.46b)$$

$$\mathcal{M}_t\mathcal{M}^*_{s/\gamma} = -2C_3K_{Z\gamma\gamma}\left[p_1\theta k_1\left(4\frac{u}{t}+2\frac{u^2}{st}+3\frac{u}{s}-\frac{t}{s}\right)\right.$$
$$\left.+p_1\theta k_2\left(2\frac{u}{t}+3\frac{u}{s}+\frac{t}{s}+2\right)+k_1\theta k_2\left(4\frac{u}{t}+2\frac{u^2}{st}+4\frac{s}{t}-2\frac{u}{s}-1\right)\right] \quad (5.46c)$$

$$\mathcal{M}_u\mathcal{M}^*_{s/\gamma} = -2C_3K_{Z\gamma\gamma}\left[p_1\theta k_1\left(4\frac{t}{u}+2\frac{t^2}{su}+3\frac{t}{s}+\frac{u}{s}\right)\right.$$
$$\left.+p_1\theta k_2\left(2\frac{t}{u}+3\frac{t}{s}+\frac{u}{s}+2\right)-k_1\theta k_2\left(2\frac{t}{u}+4\frac{s}{u}-2\frac{t}{s}+2\frac{u}{s}+3\right)\right] \quad (5.46d)$$

mit folgenden Abkürzungen für die Vorfaktoren:

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{12}\frac{Q_q e^2 g^2}{2\cos^2\theta_W}\sin(2\theta_W)(g_V^2+g_A^2) \\ &= \frac{4\pi^2}{3}\frac{Q_q\alpha^2}{\cos\theta_W\sin\theta_W}(g_V^2+g_A^2)\,, \\ C_3 &= \frac{1}{12}\frac{Q_q^2 e^3 g}{2\cos\theta_W}2\sin(2\theta_W)g_V = \frac{8\pi^2}{3}Q_q^2\alpha^2 g_V\,. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Aufgrund der Einschränkungen für die Kopplungskonstanten $K_{ZZ\gamma}$ und $K_{Z\gamma\gamma}$ (s. Abschnitt 4.2) können *nicht beide* s-Kanal-Beiträge *gleichzeitig* verschwinden und man muss daher immer mindestens einen davon berücksichtigen. Ob eine und wenn ja, welche der beiden Wechselwirkungen nicht vorkommmt, kann nur das Experiment zeigen.

Der Ausdruck für das Amplitudenquadrat kann weiterhin umgeformt werden, wenn ein spezielles Bezugssystem gewählt wird. Als Nächstes wird der Prozess im Schwerpunktsystem (CMS) des $q\bar{q}$-Paares betrachtet, dessen Kinematik in Abb. 5.1 dargestellt wird. Hier bezeichnet ω die Photonenergie und E_Z die Energie des Z-Bosons. Die Wahl der Komponenten der Vierervektoren wurde unter Berücksichtigung der Massenschalenbedingung getroffen, so dass

$$p_1^2 = p_2^2 = m_q^2 \to 0, \quad k_2^2 = 0 \quad \text{und} \quad k_1^2 = m_Z^2 \quad (5.48)$$

gilt. Setzt man in die Ausdrücke (5.41) für die Mandelstam-Variablen die Viererimpulse aus Abb. 5.1 ein, so erhält man:

$$s = (p_1+p_2)^2 = (k_1+k_2)^2 = (E_Z+\omega)^2 \quad (5.49)$$
$$t = (p_1-k_1)^2 = (k_2-p_2)^2 = -\sqrt{s}\omega(1-\cos\Theta)$$
$$u = (p_1-k_2)^2 = (k_1-p_2)^2 = -\sqrt{s}\omega(1+\cos\Theta)$$

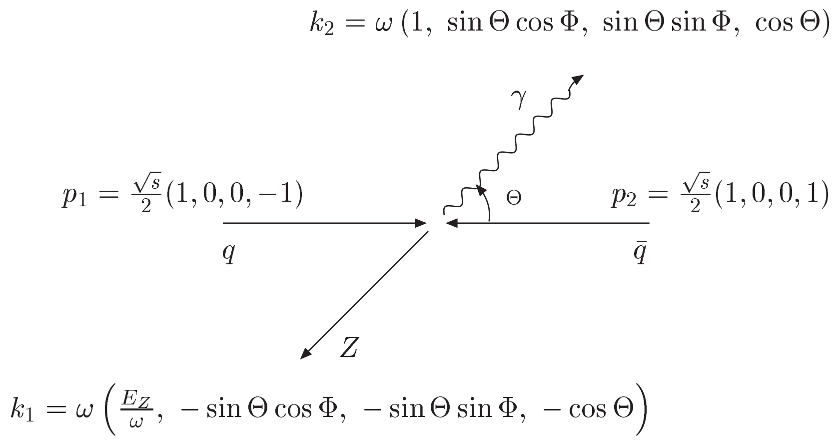


Abbildung 5.1: Die Kinematik für den Prozess $q\bar{q} \to Z\gamma$ im CMS

Verwendet man zusätzlich zu (5.48) den Energie-Erhaltungssatz

$$\sqrt{s} = \omega + E_Z \tag{5.50}$$

und die Beziehung $m_Z^2 = E_Z^2 - \omega^2$, so können die Energien der Endteilchen im $q\bar{q}$-CMS durch die Schwerpunktsenergie und die Z-Masse ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} E_Z &= \sqrt{s} - \omega\,, \qquad (5.51)\\ \omega &= \frac{s - m_Z^2}{2\sqrt{s}}\,. \end{aligned}$$

Schließlich müssen noch die θ-abhängigen Faktoren der Form $p\theta k$ ausgewertet werden. Deshalb trifft man für die reelle antisymmetrische Matrix $\theta^{\mu\nu}$ folgende Wahl [24]:

$$\theta_{\mu\nu} = \frac{1}{\Lambda_{NC}^2} C_{\mu\nu} = \frac{1}{\Lambda_{NC}^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ -C_{01} & 0 & C_{12} & -C_{13} \\ -C_{02} & -C_{12} & 0 & C_{23} \\ -C_{03} & C_{13} & -C_{23} & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.52}$$

Damit und mit den Impulsen aus Abb. 5.1 erhält man für die in (5.43)-(5.46) benötigten NC-Faktoren:

$$\begin{aligned} p_1\theta(k_1 + k_2) &= \frac{s}{2}\frac{C_{03}}{\Lambda_{NC}^2}\,, && (5.53a)\\ k_1\theta k_2 &= \omega\frac{\sqrt{s}}{\Lambda_{NC}^2}(C_{01}\sin\Theta\cos\Phi + C_{02}\sin\Theta\sin\Phi + \\ &\quad + C_{03}\cos\Theta)\,, && (5.53b)\\ p_1\theta k_2 &= \omega\frac{\sqrt{s}}{2\Lambda_{NC}^2}\left[C_{03}(1+\cos\Theta) + (C_{01} - C_{13})\sin\Theta\cos\Phi\, + \right. \end{aligned}$$

$$+ (C_{02} + C_{23}) \sin\Theta \sin\Phi] \;, \tag{5.53c}$$
$$p_1\theta k_1 = p_1\theta(k_1 + k_2) - p_1\theta k_2 \;. \tag{5.53d}$$

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die θ-abhängigen Faktoren (5.53) die einzige Quelle für die Φ-Abhängigkeit im differentiellen Wirkungsquerschnitt sein werden. Dieser ist eine lineare Funktion in den obigen Faktoren, die ihrerseits linear in $\cos\Phi$ und $\sin\Phi$ sind, so dass bei der Integration über den Azimutwinkel Φ von 0 bis 2π alle Terme, welche von Φ abhängen, wegfallen. Auf diese Tatsache soll in Kapitel 5.4 zurückgegriffen werden.

Nun kann das Betragsquadrat der Gesamtamplitude als Funktion der Raumwinkel Θ und Φ, der Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$ und dem nichtkommutativen Parameter C_{ij}/Λ_{NC}^2 $(i,j = 0,1,2,3)$ berechnet werden, indem man die obigen Ausdrücke in (5.43)-(5.46) und diese in (5.42) einsetzt. Der so erhaltene Ausdruck wird in die Gleichung (5.2) für den diff. WQ eingesetzt, welcher mit $p_f = \omega$ und $p_i = \sqrt{s}/2$ zu

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{64\pi^2}\frac{s - m_Z^2}{s^2}|\mathcal{M}|^2 \tag{5.54}$$

wird. Der diff. WQ wird an dieser Stelle nicht explizit aufgeführt, da der Ausdruck lang und nicht übersichtlich darzustellen ist. Er lässt sich jedoch folgendermaßen zusammenfassen:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} &= \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\cos\Theta)\right)_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{SM}} + \frac{1}{\Lambda_{NC}^2}F(\cos\Theta,\Phi,C_{ij}) + \\ &+ \frac{1}{\Lambda_{NC}^2}K_{ZZ\gamma}F_{ZZ\gamma}(\cos\Theta,\Phi,C_{ij}) + \frac{1}{\Lambda_{NC}^2}K_{Z\gamma\gamma}F_{Z\gamma\gamma}(\cos\Theta,\Phi,C_{ij}).\end{aligned} \tag{5.55}$$

Der gesamte nichtkommutative diff. WQ setzt sich demnach aus folgenden Anteilen zusammen:

- dem kommutativen diff. WQ

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{SM}} &= \frac{1}{6}\left(\frac{Q_q\alpha}{\sin(2\theta_W)}\right)^2 (g_V^2 + g_A^2)\left(\frac{s - m_Z^2}{s^2}\right) \\ &\left(\frac{1+\cos\Theta}{1-\cos\Theta} + + \frac{1-\cos\Theta}{1+\cos\Theta} + \frac{8}{\sin^2\Theta}\frac{m_Z^2 s}{(s-m_Z^2)^2}\right) \;,\end{aligned} \tag{5.56}$$

  welcher nur vom Polarwinkel Θ abhängt,

- einem NC-Anteil, welcher sowohl die θ-abhängigen Terme, die sich aus den t- und u-Kanal-Amplituden ergeben, als auch die vollständigen Interferenzterme zwischen diesen und der Kontaktterm-Amplitude enthält,

- und zwei NC-Anteile, die von den beiden s-Kanal-Amplituden stammen, und die, aufgrund der Einschränkung der Kopplungskonstanten $K_{ZZ\gamma}$ und $K_{Z\gamma\gamma}$ auf ein durch den kommutativen Grenzfall festgelegtes Intervall, jeweils – aber nicht beide gleichzeitig – verschwinden können.

5.4 Ergebnisse

Nun liegt der diff. WQ in Abhängigkeit der Streuwinkel, der Schwerpunktsenergie und den Parametern der Nichtkommutativität Λ_{NC} bzw. C_{ij} vor und es kann mit der Untersuchung dieser Abhängigkeiten begonnen werden.

5.4.1 Differentielle Wirkungsquerschnitte

Die letzten drei Terme im Ausdruck des diff. WQs (5.55) (d.h. der NC-Anteil) sind sowohl von dem Polarwinkel Θ als auch von dem Azimutwinkel Φ abhängig. Um den diff. WQ als Funktion des Azimutwinkels Φ zu untersuchen, integriert man (5.55) über $\cos\Theta$:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Phi}(\Phi) = \int\limits_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\cos\Theta\,. \tag{5.57}$$

Hier wurde der Abschneideparameter auf $\epsilon = 0.1$ gesetzt. In Abb. 5.2 wird die Φ-Abhängigkeit für verschiedene Werte der NC-Skala Λ_{NC} und der Kopplungskonstanten $(K_{ZZ\gamma}, K_{Z\gamma\gamma})$ dargestellt. Die SM-Kurve ist lediglich eine Gerade, da der diff. WQ des SM-Prozesses nicht vom Azimutwinkel abhängt. Die Abweichungen des nichtkommutativen diff. WQ von der SM-Kurve sind von der Größenordnung 10^{-1} fb für einen Wert des NC-Paramters von 1 TeV und um eine Größenordnung kleiner (10^{-2} fb) für $\Lambda_{NC} = 3\,\mathrm{TeV}$. Je größer Λ_{NC} gewählt wird, desto mehr nähert sich die NC-Kurve der SM-Kurve. Im Grenzfall $\theta \to 0$ geht der nichtkommutative WQ erwartungsgemäß in den SM-WQ über.

Weiterhin wird der diff. WQ als Funktion des Polarwinkels Θ betrachtet. Führt man die Integration über Φ aus, so fallen alle Terme, die den Azimutwinkel Φ enthalten, im Ausdruck des diff. WQs weg, wie am Ende des vorigen Abschnitts gezeigt wurde. Es bleibt nur eine Abhängigkeit von C_{03}, der zeitartigen Komponenten in Strahlrichtung, übrig:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\Theta}(\cos\Theta) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\Phi \sim \frac{1}{\Lambda_{NC}^2} f(C_{03}). \tag{5.58}$$

Dieses war eine zu erwartende Tatsache, da durch die Integration über den Azimutwinkel Φ in linearer Ordnung in θ alle Effekte in den Transversalrichtungen herausgemittelt werden. Wegen (5.58) ist der diff. WQ nur auf zeitartige Komponenten C_{0i}/Λ_{NC}^2 sensitiv. Sollte das Experiment zeigen, dass diese Null sind (eine Tatsache, von der einige Modelle nichtkommutativer Quantenfeldtheorien ausgehen), so müssen Effekte quadratisch in θ betrachtet werden.
Der diff. WQ (5.58) als Funktion von $\cos\Theta$ für verschiedene Werte von Λ_{NC} und für die möglichen Bereiche der Kopplungskonstanten $K_{ZZ\gamma}$ und $K_{Z\gamma\gamma}$ wird in den Abb. 5.3 und 5.4 dargestellt.

Aus Abb. 5.3, in der der diff. WQ für unterschiedliche Werte der nichtkommutativen Skala Λ_{NC} gezeigt wird, ist ersichtlich, dass die Abweichungen vom

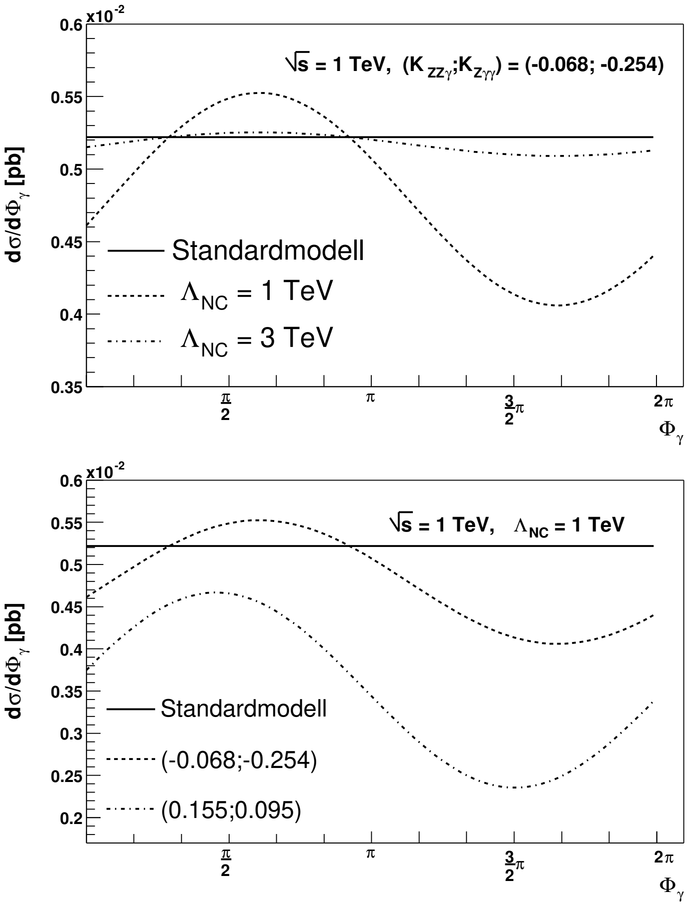


Abbildung 5.2: Diff. WQ in Abhängigkeit des Azimutwinkels Φ. *Oben:* für ein festes $(K_{ZZ\gamma}, K_{Z\gamma\gamma})$-Paar und für $\Lambda_{NC} = 1$ bzw. 3 TeV. *Unten:* für $\Lambda_{NC} = 1$ TeV und zwei verschiedene $(K_{ZZ\gamma}, K_{Z\gamma\gamma})$-Paare.

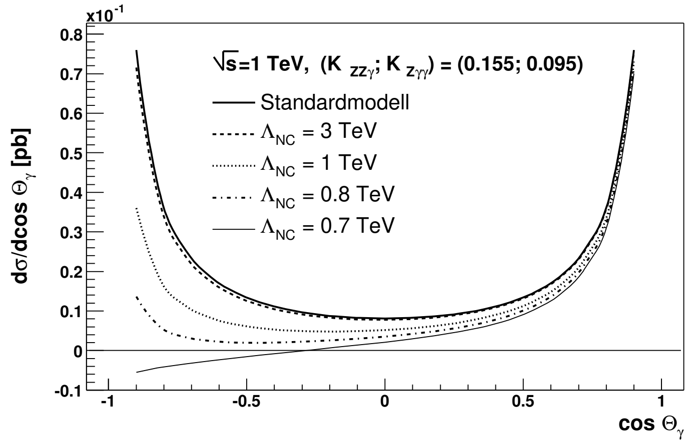


Abbildung 5.3: Diff. WQ in Abhängigkeit des Polarwinkels $\cos\Theta_\gamma$ bei festem $(K_{ZZ\gamma}; K_{Z\gamma\gamma})$-Paar und unterschiedlichen Werten der NC-Skala Λ_{NC}

kommutativen Fall umso bedeutender werden, je kleiner der Wert für Λ_{NC} angesetzt wird. Für $\Lambda_{NC} = 700\,\text{GeV}$ wird der diff. WQ sogar negativ. Das ist jedoch nicht besorgniserregend, wenn man sich die Tatsache vergegenwärtigt, dass die gesamte Theorie, die hier vorgestellt wird, in dem Parameter der Nichtkommutativität θ entwickelt wurde, und die Berechnungen nur Terme erster Ordnung in $\theta \propto 1/\Lambda_{NC}^2$ berücksichtigen. Aus diesem Grund wurden im Betragsquadrat (5.32) der Gesamtamplitude Terme weggelassen, so dass negative Wirkungsquerschnitte mathematisch durchaus möglich werden, obwohl sie physikalisch nicht zulässig sind. Deshalb ist ein negativer Wirkungsquerschnitt ein Anzeichen dafür, dass die Skala Λ_{NC} im Vergleich zu $\sqrt{s}$ zu klein gewählt wurde, und folglich die Entwicklungsreihe zusammenbricht.
Für große Werte der NC-Skala nähert sich die NC-Kurve erwartungsgemäß immer mehr der SM-Kurve an, so dass schon ab $\Lambda_{NC} \sim 3\,\text{TeV}$ die Abweichungen von der SM-Kurve grafisch schwer erkennbar sind. Deshalb wurde zur Untersuchung der Abhängigkeit von den Kopplungskonstanten immer ein Wert von $\Lambda_{NC} = 1\,\text{TeV}$ gewählt, da hier die Unterschiede am Besten erkennbar sind, während gleichzeitig der Wirkungsquerschnitt noch positiv bleibt. Die Abweichungen vom SM-Fall sind für $\Lambda_{NC} = 1\,\text{TeV}$ von der Größenordnung 40 fb für $(K_{ZZ\gamma}; K_{Z\gamma\gamma}) = (0.155; 0.095)$ und 30 fb für $(K_{ZZ\gamma}; K_{Z\gamma\gamma}) = (-0.068; -0.254)$, während für $\Lambda_{NC} = 3\,\text{Tev}$ der Unterschied ungefähr 4 fb bzw. 3 fb beträgt.
Abb. 5.4 zeigt den diff. WQ für unterschiedliche Werte der Kopplungskonstanten $(K_{ZZ\gamma}; K_{Z\gamma\gamma})$. Die Werte müssen natürlich innerhalb des in Abb. 4.2 dargestellten Bereichs liegen. Es wurden für die grafischen Darstellungen zwei extreme Eckwerte des Pentagons aus Abb. 4.2 und die Extremwerte der Bereiche, in denen jeweils eine der Konstanten Null wird, gewählt (s. Tab. 4.1).
Die Unterschiede zwischen dem kommmutativen und dem nichtkommutativen Fall sind etwas deutlicher zu erkennen, wenn man den diff. WQ in Abhängigkeit von den Rapiditäten y untersucht. Auf die Definition der Rapiditäten wird in Abschnitt 6.3.2 näher eingegangen, an dieser Stelle sei nur erwähnt, dass es sich um eine Parametrisierung des Streuwinkels handelt, welche sich bei der Umrechnung vom Schwerpunktsystem der Quarks auf das Laborsystem als vorteilhafter erweist. Der diff. WQ als Funktion dieser Größe wird in Abb. 5.5 für zwei Extremwerte des Pentagons aus Abb. 4.2 und in Abb. 5.6 für jeweils eine verschwindende Kopplungkonstante dargestellt, während die andere die zulässigen Extremwerte annimmt.
Aus letzteren ist ersichtlich, dass sich die beiden Bereiche, in denen jeweils eine der Kopplungen verschwindet, nicht überschneiden. Wird z. B. im Experiment eine Kurve gemessen, die in dem möglichen Bereich für $K_{ZZ\gamma} = 0$ liegt, bedeutet das zwar nicht, dass die $ZZ\gamma$-Kopplung automatisch Null sein muss, es lässt sich aber mit Sicherheit behaupten, dass im betrachteten Modell die $Z\gamma\gamma$-Kopplung nicht Null sein kann, da sich der erlaubte Bereich für $K_{Z\gamma\gamma} = 0$ nicht mit dem Bereich überschneidet, wo die Kurve gemessen wurde.
Eine allen Kurven gemeinsame Eigenschaft ist, dass ab einer Rapidität von $y \sim -3$ der diff. WQ nicht mehr von den Kopplungskonstanten abhängt. Die Ursache für dieses Verhalten liegt darin, dass bei großen Rapiditäten, bzw. kleinen Streuwinkeln ($\cos\Theta \approx \pm 1$), der u- und der t-Kanal dominieren, so dass die Kopplungen, die aus den s-Kanälen stammen, über den Bereich, über

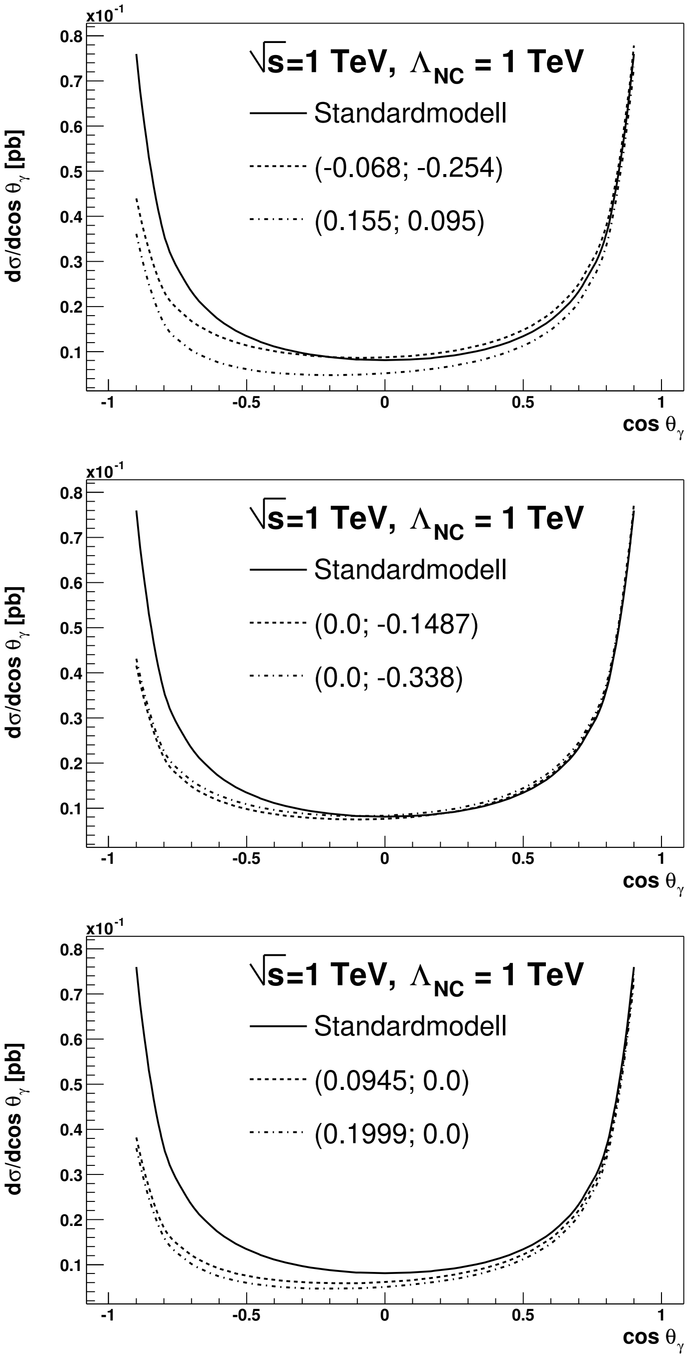


Abbildung 5.4: Diff. WQ in Abhängigkeit des Polarwinkels $\cos\Theta_\gamma$ bei festem Λ_{NC} und unterschiedlichen $(K_{ZZ\gamma}; K_{Z\gamma\gamma})$-Paaren

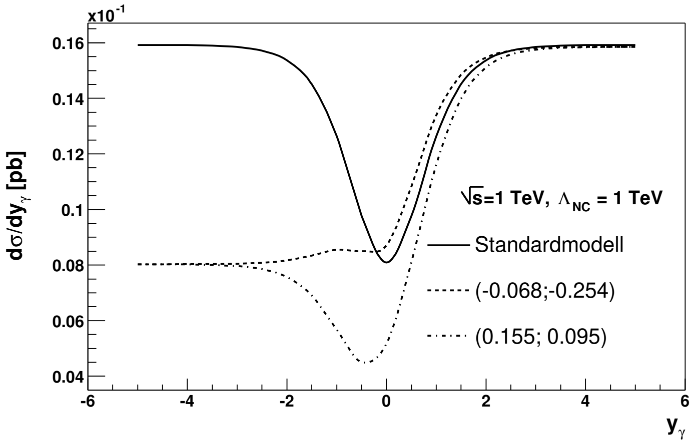


Abbildung 5.5: Diff. WQ in Abhängigkeit der Rapidität y_γ bei festem Λ_{NC} und den Extremwerten für $(K_{ZZ\gamma}; K_{Z\gamma\gamma})$

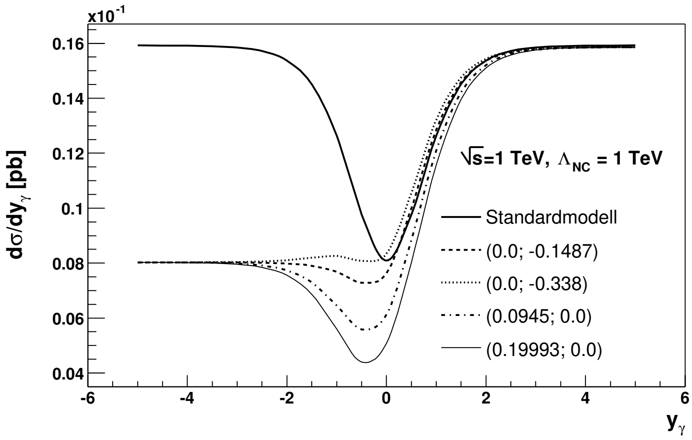


Abbildung 5.6: Diff. WQ in Abhängigkeit der Rapidität y_γ bei festem Λ_{NC} und für jeweils eine verschwindende Kopplungskonstante, während die andere die beiden zulässigen Extremwerte annimmt

den sie sich gemäß Abschnitt 4.2 ändern dürfen, nicht (oder kaum) beitragen. Zudem kommt noch hinzu, dass sich für kleine Werte der Winkel aufgrund der Parametrisierung (6.21) wenig mit der Variation der Rapidität über einen größeren Bereich ändert, so dass Terme, die $K_{ZZ\gamma}$ bzw. $K_{Z\gamma\gamma}$ enthalten, auch wenig variieren.
Dass der diff. WQ für große Rapiditäten bzw. Pseudorapiditäten nicht mehr (oder nur sehr wenig) von den Kopplungskonstanten abhängt, bietet theoretisch die Möglichkeit, die NC-Skala zu bestimmen, und zwar unabhängig von den Eichbosonenkopplungen. Leider entspricht ein Rapiditätenwert von $y \sim -3$ einem Streuwinkel von ~ 0.1 Grad, der experimentell, aufgrund des Detektoraufbaus und des hadronischen Untergrundes, schwer zugänglich ist.
Die Wahl der Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s} = 1\,\text{TeV}$ ist für die zur Zeit zur Verfügung stehenden Schwerpunktsenergien auch nicht realistisch, da die Quarkenergien nur Bruchteile der Protonenergien darstellen. Um eine Quark-Schwerpunktsenergie von 1 TeV zu erreichen, müsste die Protonenergie einen mit den heutigen Möglichkeiten experimentell nicht erreichbaren Wert annehmen. Erst ab dem Jahr 2008 sollen Proton-Kollisionen bei $\sqrt{s} = 14\,\text{TeV}$ von dem Proton-Proton-Collider LHC ermöglicht werden. An dieser Stelle wurden die Ergebnisse lediglich zur Veranschaulichung dargestellt, da der experimentell bedeutungsvolle und mit den heutigen Möglichkeiten messbare hadronische Prozess, der im nächsten Kapitel untersucht werden soll, ein ähnliches Verhalten in Bezug auf die hier interessierenden Abhängigkeiten aufweist, aber die Abhängigkeit von den Kopplungskonstanten in diesem Fall nicht so prägnant zu sehen ist.
Der diff. WQ als Funktion des Streuwinkels bzw. der Rapidität des Z-Bosons wurde hier nicht mehr dargestellt, da er sich im Schwerpunktsystem der Quarks nur um ein Vorzeichen von dem des Photons unterscheidet (back-to-back-Streuprozess), und folglich der diff. WQ der an der y-Achse gespiegelten Version des Photonwirkungsquerschnittes entspricht.

5.4.2 Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie

Der SM-Anteil des diff. WQs (5.58) ist vollkommen symmetrisch bezüglich Vorwärts- und Rückwärtsstreuung. Wie in Abschnitt 5.3 gezeigt wurde, geht diese Eigenschaft durch die zusätzlichen Wechselwirkungen (insbesondere durch den Kontaktterm-Beitrag) verloren. Deshalb stellt die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie A_{FB} eine gute Observable zum Nachweis nichtkommutativer Effekte dar. Die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie (Forward-Backward-Asymmetry, FBA) wird folgendermaßen definiert:

$$A_{FB} = \frac{\sigma_b - \sigma_f}{\sigma_b + \sigma_f}\,, \tag{5.59}$$

mit

$$\sigma_b = \int\limits_{-1+\epsilon}^{0} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\Theta} \mathrm{d}\cos\Theta\,, \tag{5.60}$$

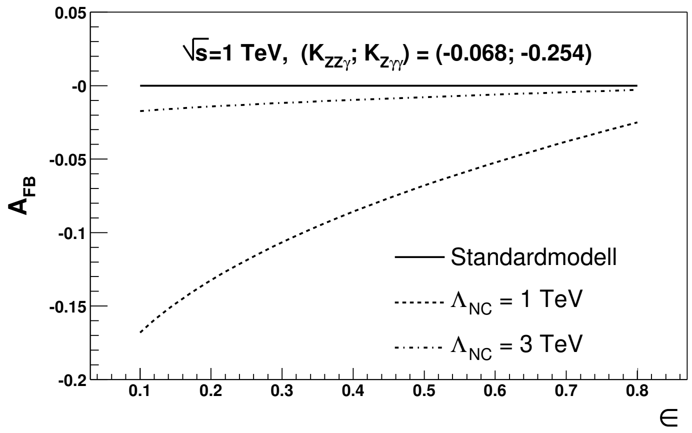


Abbildung 5.7: Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie in Abhängigkeit des Abschneideparameters für ein festes $(K_{ZZ\gamma}; K_{Z\gamma\gamma})$-Paar und unterschiedliche Λ_{NC}-Werte

$$\sigma_f = \int_0^{1-\epsilon} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\Theta} \mathrm{d}\cos\Theta\,. \tag{5.61}$$

Sie gibt also den Unterschied, zwischen der Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen nach vorne und der Wahrscheinlichkeit, dass es rückwärts gestreut wird, an. Die FBA wird immer größer, je kleiner der Abschneideparameter ϵ gewählt wird, wie aus Abb. 5.7 ersichtlich ist, wo die FBA als Funktion des Abschneideparameters für zwei Werte der NC-Skala ($\Lambda_{NC} = 1$ bzw. $3\,\mathrm{TeV}$) dargestellt wird. Im SM-Prozess tritt im CMS der Quarks keine FBA auf, da in diesem Fall nur der u- und der t-Kanal zur Gesamtamplitude beitragen. Im nichtkommutativen Fall wird sie umso größer, je kleiner die NC-Skala Λ_{NC} wird.
Im Falle des hadronischen Wirkungsquerschnittes (Kap. 6) gibt es einen kleinsten, durch den Detektoraufbau bedingten Wert für ϵ. Abb. 5.7 zeigt die FBA für das Photon in Abhängigkeit des Abschneideparameters. Die entsprechende FBA für das Z-Boson weist lediglich das entgegengesetzte Vorzeichen auf, da der Prozess im CMS der Quarks betrachtet wird, bei dem die Teilchen im Endzustand in entgegengesetzten Richtungen gestreut werden. Wird das System entlang der Strahlrichtung geboostet, so müssen die Observablen für das Photon und für das Z-Boson getrennt behandelt werden.

5.4.3 Integrierte Wirkungsquerschnitte

Den integrierten partonischen Wirkungsquerschnitt erhält man, wenn man den diff. WQ (5.55) über den Phasenraum integriert. Da der WQ für $\cos\Theta = \pm 1$ divergiert, kann nicht über den gesamten Phasenraum integriert werden:

$$\sigma = \int_0^{2\pi} \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \mathrm{d}\Phi\,\mathrm{d}\cos\Theta \tag{5.62}$$

Im Fall des hier betrachteten partonischen WQs wurde der Abschneideparameter $\epsilon = 0.1$ gewählt. Abb. 5.8 zeigt den integrierten WQ ab Energien $\sqrt{s} > 500\,\text{TeV}$ für unterschiedliche Werte von Λ_{NC} und für diejenigen Werte der Kopplungskonstanten $(K_{ZZ\gamma}; K_{Z\gamma\gamma})$, für die die Abweichung von der SM-Kurve bei festem Λ_{NC} am deutlichsten zu sehen ist. Die Abhängigkeit des WQs von den Kopplungskonstanten ist für das u- und für das d-Quark verschieden: Die Abweichungen vom SM sind für das u-Quark am größten für das positive und am kleinsten für das negative $(K_{ZZ\gamma}; K_{Z\gamma\gamma})$-Paar, während der WQ für das d-Quark das entgegengesetzte Verhalten aufweist. Diese Tatsache beruht darauf, dass die Kopplungskonstanten immer zusammen mit der Ladung und den Vektor- bzw. Axialvektorkopplungen der Quarks auftreten (5.47). Während diese für das u positiv sind, haben sie für das d negative Vorzeichen (Anhang D).

Für hohe Schwerpunktsenergien ($\sqrt{s} \sim 1.7\,\text{TeV}$) wird der Wirkungsquerschnitt schon ab $\Lambda_{NC} = 1\,\text{TeV}$ negativ. Das liegt wieder daran, dass das Verhältnis $\sqrt{s}/\Lambda_{NC}^2$ zu groß wird, und die Theorie ab diesem Wert nicht mehr in dieser Größe entwickelt werden darf.

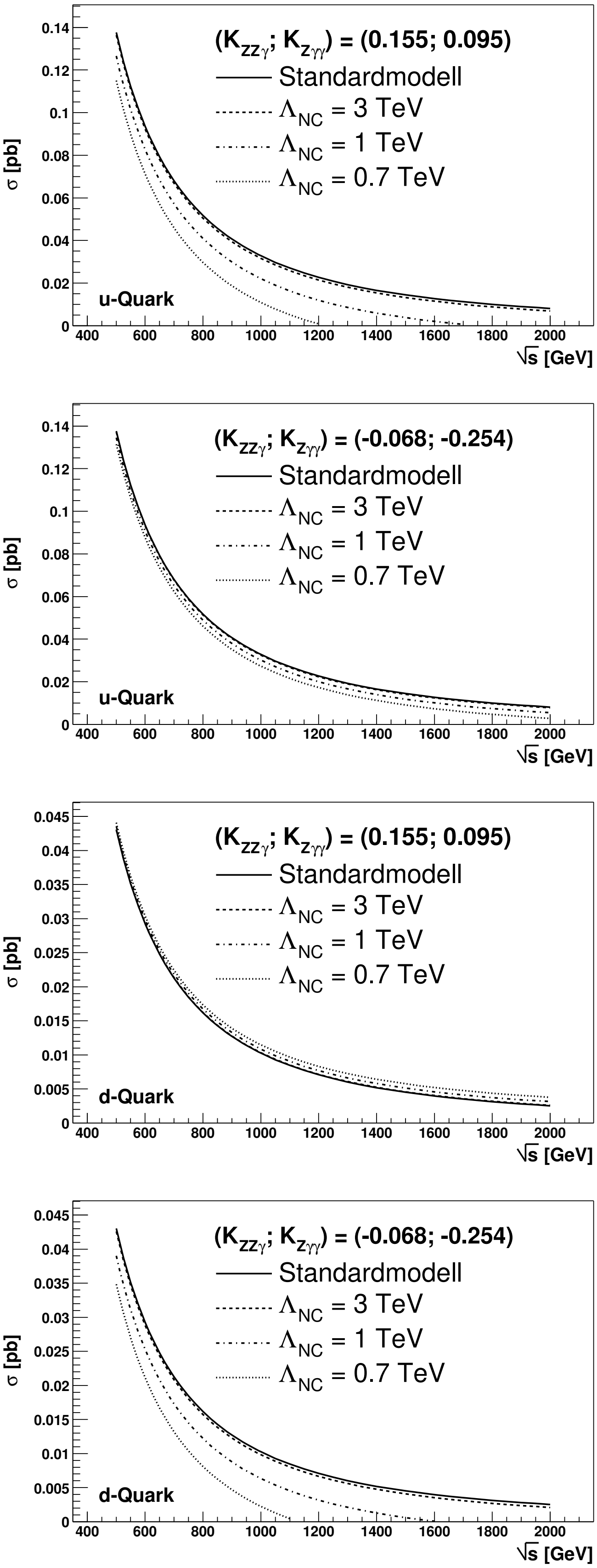


Abbildung 5.8: Integrierter WQ für ein festes $(K_{ZZ\gamma}; K_{Z\gamma\gamma})$-Paar und unterschiedliche Λ_{NC}-Werte bei $\epsilon = 0.1$, jeweils für das u- (*oben*) und d-Quark (*unten*)

Kapitel 6

Der Prozess $p\bar{p} \to Z\gamma$

In Kap. 5 wurde der differentielle Wirkungsquerschnitt für den Prozess $q\bar{q} \to Z\gamma$ im NCSM untersucht. Experimentell zugängliche Observablen sind jedoch solche, die den hadronischen Prozess $p\bar{p} \to Z\gamma$ beschreiben. Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Bestimmung der hadronischen Wirkungsquerschnitte aus den in Kap. 5 berechneten Wirkungsquerschnitten auf Parton-Ebene. Davor erfolgt eine kurze Beschreibung des Partonmodells, auf dessen Ergebnisse die Berechnungen aufbauen. Eine ausführliche Behandlung des QCD-Partonmodells wird z. B. in [25] gegeben.

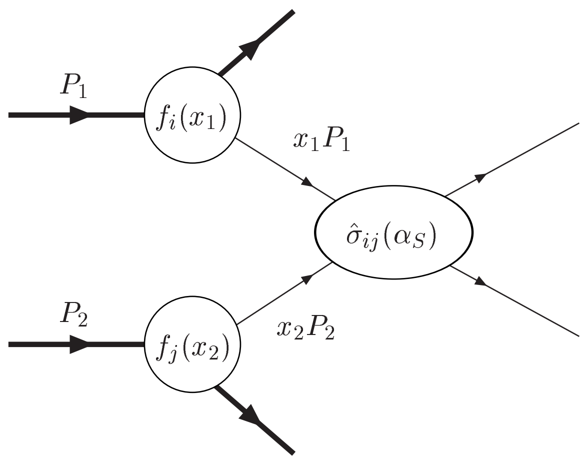
6.1 Das QCD-Partonmodell

Wenn zwei Protonen aufeinander stoßen, kommt es zu Wechselwirkungen zwischen deren Konstituenten, den Partonen. Das QCD-Partonmodell liefert eine Beschreibung für hochenergetische Wechselwirkungen zwischen Hadronen: Der harte Streuprozess zweier Hadronen ist das Ergebnis der Wechselwirkung zwischen den Quarks und den Gluonen der einlaufenden Hadronen. Bei genügend großen Skalen Q des Impulsübertrages können Faktorisierungstheoreme angewendet werden, um Abstand- und Impuls-Skalen in einer Reaktion zu trennen. Die asymptotische Freiheit der QCD erlaubt dann die störungstheoretische Behandlung der kurzabständigen Anteile der Wirkungsquerschnitte in niedrigen Ordnungen $\alpha_s(Q)$.
Das Faktorisierungstheorem besagt, dass physikalische Observablen in einen störungstheoretisch berechenbaren („infrarot-sicheren") und einen nichtstörungstheoretischen, dafür aber universellen Anteil faktorisiert werden können. Damit kann der Wirkungsquerschnitt für den harten Streuprozess zweier Hadronen folgendermaßen geschrieben werden:

$$\sigma(P_1, P_2) = \sum_{i,j} \int \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 f_i(x_1, \mu^2) f_j(x_2, \mu^2) \hat{\sigma}_{ij}(p_1, p_2, \alpha_S(\mu^2), Q^2/\mu^2) \,. \quad (6.1)$$

Die Impulse der an der harten Streuung beteiligten Partonen betragen jeweils einen Bruchteil x_i der entsprechenden Hadronimpulse: $p_i = x_i P_i$ $(i = 1, 2)$. Die Funktionen $f_i(x_i, \mu^2)$ sind die QCD-Verteilungsfunktionen für Quarks und

Gluonen (Parton Distribution Functions, PDFs), die bei der Faktorisierungsskala μ^2 definiert sind. Die Größe $\hat{\sigma}_{ij}$ bezeichnet den Wirkungsquerschnitt für die gestreuten Partonen i und j bei kurzen Abständen (hohen Energien), d. h. bei Abständen, bei denen davon ausgegangen werden kann, dass nur die direkt am Prozess beteiligten Partonen miteinander wechselwirken, unabhängig von dem restlichen Partoninhalt der betrachteten Hadronen. Die Partonmodell-Beschreibung eines harten Streuprozesses kann man folgendermaßen bildlich darstellen:



Da die Kopplung bei hohen Energien klein ist, kann man den hochenergetischen Wirkungsquerschnitt $\hat{\sigma}$ als Störungsreihe in der Kopplungskonstanten α_S entwickeln. In führender Ordnung ist $\hat{\sigma}$ identisch mit dem normalen partonischen Wirkungsquerschnitt. Betrachtet man höhere Ordnungen der Störungsreihe, so berechnet man den hochenergetischen WQ aus dem partonischen WQ, indem man die niederenergetischen Anteile entfernt und diese in die PDFs hineinfaktorisiert. Dieses ist notwendig, da der störungstheoretisch berechnete Parton-WQ Beiträge von Wechselwirkungen enthält, die lange vor dem harten Streuprozess stattgefunden haben. So werden dadurch z. B. IR-divergente Anteile in den PDFs absorbiert. Der verbleibende WQ beinhaltet also nur hohe Impulsüberträge (und demnach kurze Abstände und Zeiten).
Die Faktorisierungsskala μ sollte von der Größenordnung der harten Skala Q sein, bei welcher die Parton-Parton-Wechselwirkung stattfindet. Ein Parton, das mit einem niedrigen Transversalimpuls ($< \mu$) emittiert wird (z. B. Gluon-Bremsstrahlung), wird als der hadronischen Struktur angehörend betrachtet und in die PDFs absorbiert, während ein Parton hohen Transversalimpulses ($> \mu$) als Teil des hochenergetischen WQs betrachtet wird. Im Allgemeinen wird die Skala $\mu = Q$ gesetzt, weil damit große Logarithmen der Form

$$\sim \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2}$$

minimiert werden.

In der vorliegenden Arbeit wird der Prozess $p\bar{p} \to Z\gamma$ in führender Ordnung der Störungsreihe betrachtet. Der WQ $\hat{\sigma}_{q\bar{q}}$ ist demnach identisch mit dem in

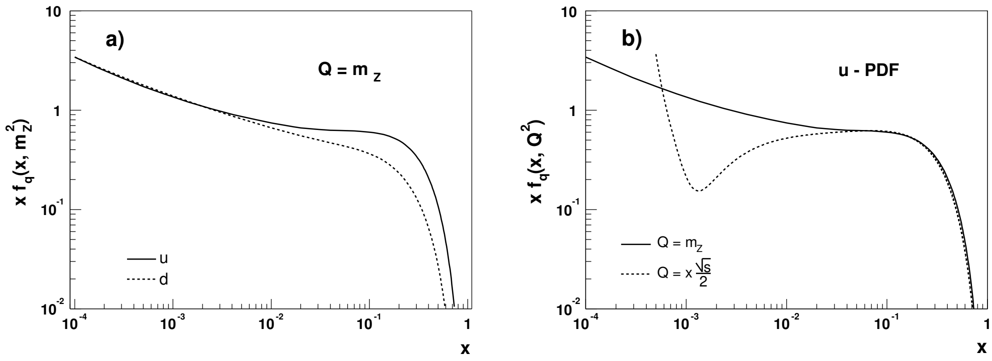


Abbildung 6.1: Parton-Verteilungsfunktionen [26]. a) für das u- bzw. d-Quark bei einer festen Skala $Q = m_Z$ b) für das u-Quark bei verschiedenen Skalen $Q = m_Z$ bzw. $Q = x\sqrt{s}/2$

Kap. 5 berechneten partonischen WQ und in diesem Fall auch nicht abhängig von der Kopplungskonstanten der starken Wechselwirkung. Mit der Faktorisierungsskala $\mu^2 = Q^2 = m_Z^2$ ist der hadronische WQ durch

$$\begin{aligned} &\sigma(p(P_1)\bar{p}(P_2) \to Z\gamma) = \\ &\quad = \sum_q \int_0^1 \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 f_q(x_1, m_Z^2) f_{\bar{q}}(x_2, m_Z^2)\, \hat{\sigma}(q(p_1)\bar{q}(p_2) \to Z\gamma) \end{aligned} \tag{6.2}$$

gegeben. Trägt das Quark den Impuls $p_1 = x_1 P_1$, d. h. den x_1-ten Anteil des Protonimpulses P_1, und das Antiquark den Impuls $p_2 = x_2 P_2$, so gibt die Strukturfunktion $f_q(x_1, Q)\mathrm{d}x_1$ die Wahrscheinlichkeit dafür an, im Proton ein Quark mit dem Protonimpulsanteil im Intervall $[x_1, x_1 + \mathrm{d}x_1]$, und $f_{\bar{q}}(x_2, Q)\mathrm{d}x_2$ die Wahrscheinlichkeit dafür an, im Antiproton ein Antiquark mit dem Impulsanteil im Intervall $[x_2, x_2 + \mathrm{d}x_2]$ zu finden.
In dieser Arbeit wurde für die Quark-(Antiquark-)Verteilungsfunktionen die CTEQ6M-Serie im Standard-$\overline{\mathrm{MS}}$-Faktorisierungsschema der CTEQ-Kollaboration verwendet [26]. Abb. 6.1 zeigt die Verteilungsfunktionen der u- bzw. d-Quarks bei zwei verschiedenen Skalen: $Q^2 = m_Z^2$ (Abb. 6.1a) und $Q^2 = x\sqrt{s}/2$ (Abb. 6.1b), wobei $x\sqrt{s}/2$ die Quarkenergie im CMS ist. In Abb. 6.1b wird für das u-Quark der Unterschied zwischen den PDFs bei den verschiedenen Skalen gezeigt. Große Abweichungen gibt es erst bei kleinen x-Werten. Da aber im CMS eine Mindestenergie, die der Z-Masse entspricht, aufgebracht werden muss, d. h. $Q > m_Z/2$, was $x \gtrsim 0.1$ entspricht, so ist es ausreichend, die Wirkungsquerschnitte für *eine* Skala zu berechnen, da die PDFs für $x \gtrsim 0.1$ fast gleich verlaufen. In den nachfolgenden Rechnungen wurden die PDFs bei $Q^2 = m_Z^2$ ausgewertet.

6.2 Umrechnung auf Laborsystemgrößen

Dieser Abschnitt befasst sich mit der Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnittes für den hadronischen Prozess $p\bar{p} \to Z\gamma$ als Funktion der Laborsy-

stemgrößen. In Abschnitt 6.1 wurde gezeigt, dass sich der hadronische WQ aus der Konvolution des partonischen WQs mit den entsprechenden Verteilungsfunktionen (Abb. 6.1) ergibt.
Zunächst muss der in Abschnitt 5.3 berechnete differentielle WQ (5.55) auf Laborsystemgrößen umgerechnet werden. Von nun an bezeichnen $\hat{s}$ die Schwerpunktsenergie und Θ^* den Streuwinkel im CMS des $q\bar{q}$-Paares, während s und Θ die entsprechenden Größen im Laborsystem (CMS des $p\bar{p}$-Paares) sind. Der in Abschnitt 6.1 berechnete WQ ist eine Funktion der CMS-Größen $\hat{s}$ und Θ^*. Es muss nun eine Beziehung zwischen diesen und den Laborsystemgrößen hergestellt werden.
Für das Schwerpunktsenergiequadrat ergibt sich im Grenzfall masseloser Quarks:

$$\hat{s} = (p_1 + p_2)^2 = 2p_1p_2 = 2x_1x_2P_1P_2 = x_1x_2s\,.$$

Die Umrechnung des CMS-Winkels Θ^* auf den Laborwinkel Θ ist etwas aufwendiger [27]. Der Übergang aus dem CMS in das Laborsystem (LS) entspricht einem reinen Lorentz-Boost in Strahlrichtung (z-Richtung), wenn man aufgrund der hohen Energien der einlaufenden (Anti-)Protonen die Bewegung der (Anti-)Quarks in Transversalrichtung vernachlässigt. Die Energie und der Impuls eines Teilchens der Masse m und der Geschwindigkeit v^* im CMS transformieren sich beim Übergang in das LS, das sich mit einer Geschwindigkeit v relativ zum CMS bewegt, folgendermaßen:

$$\begin{aligned} p_x &= p_x^* \\ p_y &= p_y^* \\ p_z &= \gamma(p_z^* + vE^*) \\ E &= \gamma(E^* + vp_z^*)\,, \end{aligned} \tag{6.3}$$

mit

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,. \tag{6.4}$$

Schreibt man die Gleichungen (6.3) in Polarkoordinaten um,

$$P\sin\Theta = P^*\sin\Theta^* \tag{6.5a}$$

$$P\cos\Theta = \gamma P^*\cos\Theta^* + \gamma vE^*, \tag{6.5b}$$

so erhält man die Transformationsgleichung für den Laborwinkel Θ, indem man (6.5a) durch (6.5b) teilt:

$$\tan\Theta = \frac{\sin\Theta^*}{\gamma(\cos\Theta^* + g^*)}\,. \tag{6.6}$$

Dabei wurde

$$g^* = \frac{v}{P^*/E^*} = \frac{v}{v^*}$$

verwendet. Den CMS-Winkel Θ^* erhält man durch Auflösen von (6.6) nach $\cos\Theta^*$:

$$\cos\Theta^{*\pm} = \frac{g^*\gamma^2\tan^2\Theta \pm \sqrt{D}}{1+\gamma^2\tan^2\Theta}\,, \tag{6.7}$$

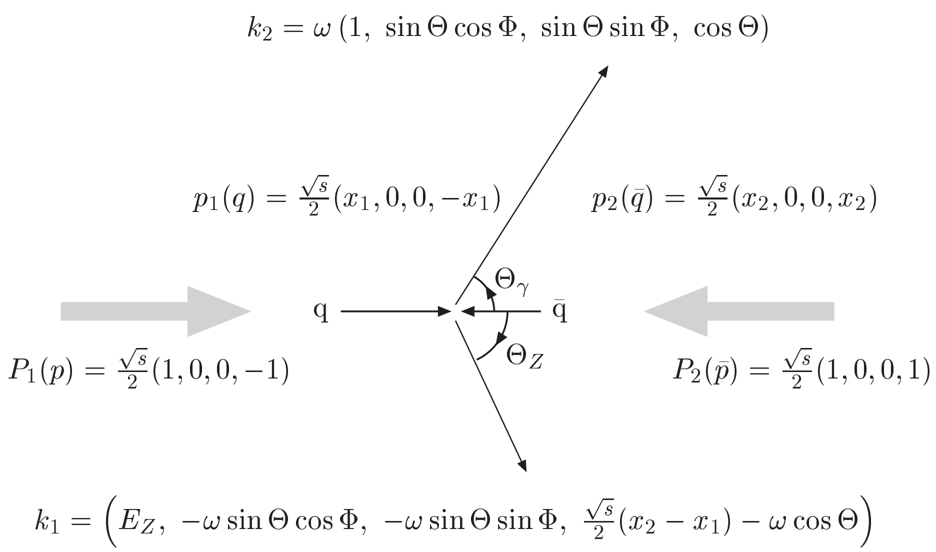


Abbildung 6.2: Die Kinematik für den Prozess $p\bar{p} \to Z\gamma$ im Schwerpunktsystem der Protonen. p_1 bzw. p_2 bezeichnen die (Anti)Quark-Impulse, P_1 bzw. P_2 sind die (Anti)Proton-Impulse

mit

$$D = 1 + (1 - g^{*2})\gamma^2 \tan^2\Theta.$$

Nun müssen in (6.7) die entsprechenden Größen für den hier betrachteten Prozess eingesetzt werden, dessen Kinematik in Abb. 6.2 dargestellt wird.
Man kann die Geschwindigkeit des CMS bezüglich des Laborsystems durch die Impulsanteile der Quarks ausdrücken (s. Abb. 6.2)

$$v = \frac{P_{\mathrm{CMS}}}{E_{\mathrm{CMS}}} = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1} = \frac{x_-}{x_+}\,, \tag{6.8}$$

und damit auch

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{x_+}{2\sqrt{x_1 x_2}}\,. \tag{6.9}$$

Der Ausdruck für die LS-Photonenergie ω lässt sich wiederum aus der Energie-Impulserhaltung und der Massenschalenbedingung herleiten und ist durch

$$\omega = \frac{x_1 x_2 s - m_Z^2}{\sqrt{s}(x_+ - x_- \cos\Theta_\gamma)} \tag{6.10}$$

gegeben. Für die Beziehung zwischen CMS-Winkel und LS-Winkel im Fall des Photons ($m = 0$) findet man aus (6.7) mit $v^* = 1$ und damit $g^* = v$ folgende Beziehung:

$$\cos\Theta_\gamma^* = \frac{\cos\Theta_\gamma - v}{1 - v\cos\Theta_\gamma}\,. \tag{6.11}$$

Der CMS-Winkel wird in Abhängigkeit des Laborwinkels in Abb. 6.3a dargestellt.

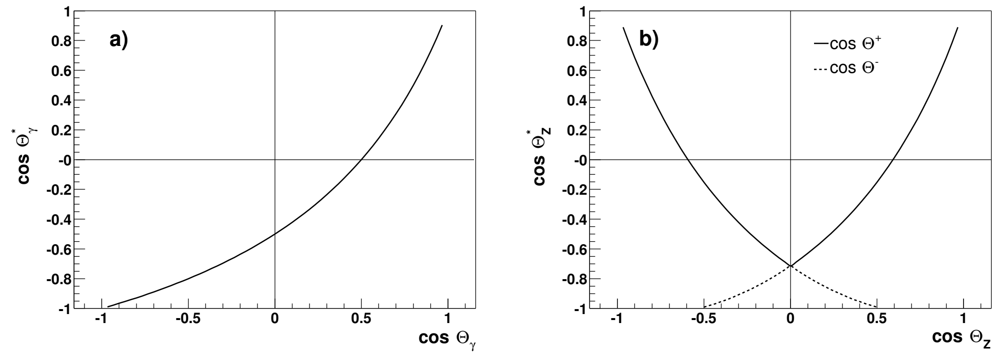


Abbildung 6.3: Zusammenhang zwischen CMS- und LS- Winkel. *Rechts:* für das Photon. *Links* für das Z-Boson

Für das massebehaftete Z-Boson ist der CMS-Winkel durch (6.7) gegeben, mit $g^* = v/v^*$ und der Geschwindigkeit des Z-Bosons im Schwerpunktsystem der Quarks:

$$v^* = \frac{\omega^*}{E^*} = \frac{\hat{s} - m_Z^2}{\hat{s} + m_Z^2}. \tag{6.12}$$

Dabei wurden für die CMS-Größen ω^* und E_Z^* die Beziehungen (5.51) verwendet. Für den Z-Winkel gibt es folglich zwei Lösungen, welche beide in Abb. 6.3 dargestellt sind. Da die Abbildung zwischen CMS- und LS-Winkel eindeutig sein muss, wird die Funktion $\cos\Theta_Z^*(\cos\Theta_Z)$ aus den beiden Lösungen (6.7) folgendermaßen zusammengesetzt:

$$\cos\Theta_Z^* = \begin{cases} \cos\Theta^{*-} & \text{für} \quad -1 \ < \cos\Theta \ < 0, \\ \cos\Theta^{*+} & \text{für} \quad 0 \ < \cos\Theta \ < 1 \ . \end{cases} \tag{6.13}$$

An der Stelle $\cos\Theta = 0$ ist die Funktion (6.13) nicht definiert, man kann jedoch den Grenzwert

$$\lim_{\cos\Theta_Z \to 0} (\cos\Theta_{\pm Z}^*) = -\frac{v}{v^*} \tag{6.14}$$

bilden. Bei der Integration über $\cos\Theta_Z$ muss man folglich obige Fallunterscheidung machen und über die entsprechenden Ausdrücke für $\cos\Theta^*$ integrieren.
Nachdem hiermit die CMS-Größen durch LS-Größen ausgedrückt wurden, kann der differentielle Wirkungsquerschnitt als Funktion der experimentell zugänglichen LS-Größen berechnet werden. Dafür wird in dem Ausdruck (5.55) die Schwerpunktsenergie der Quarks $\sqrt{\hat{s}}$ durch die Schwerpunktsenergie der Protonen $\sqrt{s}$ ausgedrückt, $\hat{s} = x_1 x_2 s$, und für $\cos\Theta_{Z/\gamma}^*$ die Variablentransformation (6.13) bzw. (6.11) durchgeführt. Schließlich müssen noch die entsprechenden Jacobideterminanten berechnet werden. Für das Photon beträgt diese:

$$\frac{\mathrm{d}\cos\Theta_\gamma^*}{\mathrm{d}\cos\Theta_\gamma} = \frac{1 - v^2}{(\cos\Theta_\gamma v - 1)^2}\,. \tag{6.15}$$

Der entsprechende Ausdruck für das Z-Boson wird hier nicht mehr explizit aufgeführt, man erhält ihn, indem man (6.13) nach $\cos\Theta$ ableitet.

6.3 Ergebnisse

Mit den Variablentransformationen aus dem vorhergehenden Abschnitt erhält man für den differentiellen Wirkungsquerschnitt des Prozesses $p\bar{p} \to Z\gamma$ folgenden Ausdruck:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\Theta_{Z/\gamma}} = \sum_q \int_0^1 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}\Phi f_q(x_1, m_Z^2) f_{\bar{q}}(x_2, m_Z^2)$$
$$\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\cos\Theta^*_{Z/\gamma}\mathrm{d}\Phi}\left(\hat{s} = x_1 x_2 s, \cos\Theta^*_{Z/\gamma}(\cos\Theta_{Z/\gamma})\right)\frac{\mathrm{d}\cos\Theta^*_{Z/\gamma}}{\mathrm{d}\cos\Theta_{Z/\gamma}} \quad (6.16)$$

In der Summation über die Quarks bzw. Antiquarks wurden die Seequarks vernachlässigt, da sie einen kleinen Bruchteil der Protonimpulse tragen und die Integrationsgrenzen für die Impulsbruchteile x_1 bzw. x_2 von 0.01 bis 1.0 verlaufen. Es wird demnach nur über die Valenzquarks (zwei u- und ein d-Quark) summiert:

$$\sum_q f_q(x_1) f_{\bar{q}}(x_2)\hat{\sigma}(Q_q) = 2 f_u(x_1) f_{\bar{u}}(x_2)\hat{\sigma}(Q_u) + f_d(x_1) f_{\bar{d}}(x_2)\hat{\sigma}(Q_d)\,. \quad (6.17)$$

Für die dreidimensionalen Integrationen (über x_1, x_2, Φ) und nachfolgenden vierdimensionalen (über x_1, x_2, Φ und $\cos\Theta$) wurde der `Vamp`-Algorithmus verwendet, eine neue Implementation des klassischen `Vegas`-Algorithmus für adaptive multi-dimensionale Monte Carlo-Integration [28, 29].

In den folgenden Abschnitten werden einige Observablen für den Prozess $p\bar{p} \to Z\gamma$ in Hinblick auf deren experimentelle Untersuchung am Tevatron, dem $p\bar{p}$-Collider am Fermilab betrachtet. Hier können Schwerpunktsenergien von $\sqrt{s} = 1.8\,\mathrm{TeV}$ erreicht werden, welche bis zur Inbetriebnahme des LHC (voraussichtlich im Jahr 2008), an dem Schwerpunktsenergien von 14 TeV erwartet werden können, die höchsterreichbaren Schwerpunktsenergien darstellen. Daher wurden im Folgenden nur Schwerpunktsenergien von 1.8 TeV angenommen.
Als kinematischer Schnitt wurde auf der einen Seite $\sqrt{\hat{s}} = \sqrt{x_1 x_2 s} > 100\,\mathrm{GeV}$ angesetzt, da der Prozess erst ab Quark-Schwerpunktsenergien, die größer als die Masse des Z-Bosons sind, stattfinden kann. Auf der anderen Seite ist es im Experiment üblich, die Schnitte auf den Transversalimpuls $p_\perp$der Endteilchen zu beziehen. In den folgenden Abschnitten wurde für das Photon ein Transversalimpuls $p_\perp > 10\,\mathrm{GeV}$ gefordert, während für das Z-Boson $p_\perp > 40\,\mathrm{GeV}$ angenommen wurde.

6.3.1 Differentielle Wirkungsquerschnitte in Abhängigkeit des Streuwinkels

Für die Protonen wurde immer eine Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s} = 1.8\,\mathrm{TeV}$ angenommen. Da die Schwerpunktsenergie im Quarksystem durch $\sqrt{\hat{s}} = \sqrt{x_1 x_2 s}$ gegeben wird, hat sie einen viel kleineren Wert als denjenigen, mit dem in Kap. 5

die partonischen Wirkungsquerschnitte berechnet wurden ($\sqrt{\hat{s}} = 1\,\mathrm{TeV}$). Deshalb ist der hadronische diff. WQ auf niedrigere Werte der NC-Skala Λ_{NC} sensitiv. Um noch nichtkommutative Effekte erkennen zu können, wurde in diesem Abschnitt von $\Lambda_{NC} = 0.1 \; - \; 0.3\,\mathrm{TeV}$ ausgegangen.
Abb. 6.4 zeigt den hadronischen diff. WQ als Funktion der LS-Winkel. Die Abhängigkeit von den LS-Winkeln ist unterschiedlich für massive und masselose Teilchen (Abschnitt 6.2), deshalb wurden die WQ für das Photon und für das Z-Boson separat untersucht, wobei in beiden Fällen die Bedingung $\sqrt{\hat{s}} > 100\,\mathrm{GeV}$ verwendet wurde. Die NC-Kurve des massebehafteten Z-Bosons weist eine größere FBA auf als die des Photons (s. Abschnitt 6.3.3).

6.3.2 Differentielle Wirkungsquerschnitte in Abhängigkeit der Rapiditäten

Im Experiment benutzt man häufig als Parameter für den Endzustand die longitudinalen Rapiditäten der Endteilchen y_Z bzw. y_γ, da sich diese unter longitudinalen Boosts einfach (d. h. additiv) transformieren. In diesem Abschnitt wird der differentielle Wirkungsquerschnitt als Funktion dieser Größen angegeben.

Der Viererimpuls eines Teilchens der Masse m kann folgendermaßen parametrisiert werden:

$$p^\mu \;\; = (E, p_x, p_y, p_z) = (m_\perp \cosh y, p_x, p_y, m_\perp \sinh y), \tag{6.18}$$

mit der transversalen Masse $m_\perp = \sqrt{p_\perp^2 + m^2}$ und der Rapidität

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_z}{E - p_z} \right). \tag{6.19}$$

Oft wird statt der Rapidität die Pseudorapidität

$$\eta = - \ln \tan \left(\frac{\Theta}{2} \right) \tag{6.20}$$

verwendet, welche für große Impulse $p \gg m$ bzw. im Limes $m \to 0$ mit der Rapidität übereinstimmt. Man kann nun in (6.16) folgende Variablentransformation durchführen:

$$\cos \Theta_{Z/\gamma} = \tanh(y_{Z/\gamma}) \tag{6.21}$$

mit der entsprechenden Jacobideterminanten:

$$\frac{\mathrm{d} \cos \Theta_{Z/\gamma}}{\mathrm{d} y_{Z/\gamma}} = \frac{1}{\cosh^2 y_{Z/\gamma}}. \tag{6.22}$$

Hier wurden kinematische Schnitte bezüglich des Transversalimpulses

$$p_\perp = \omega \sin \Theta \tag{6.23}$$

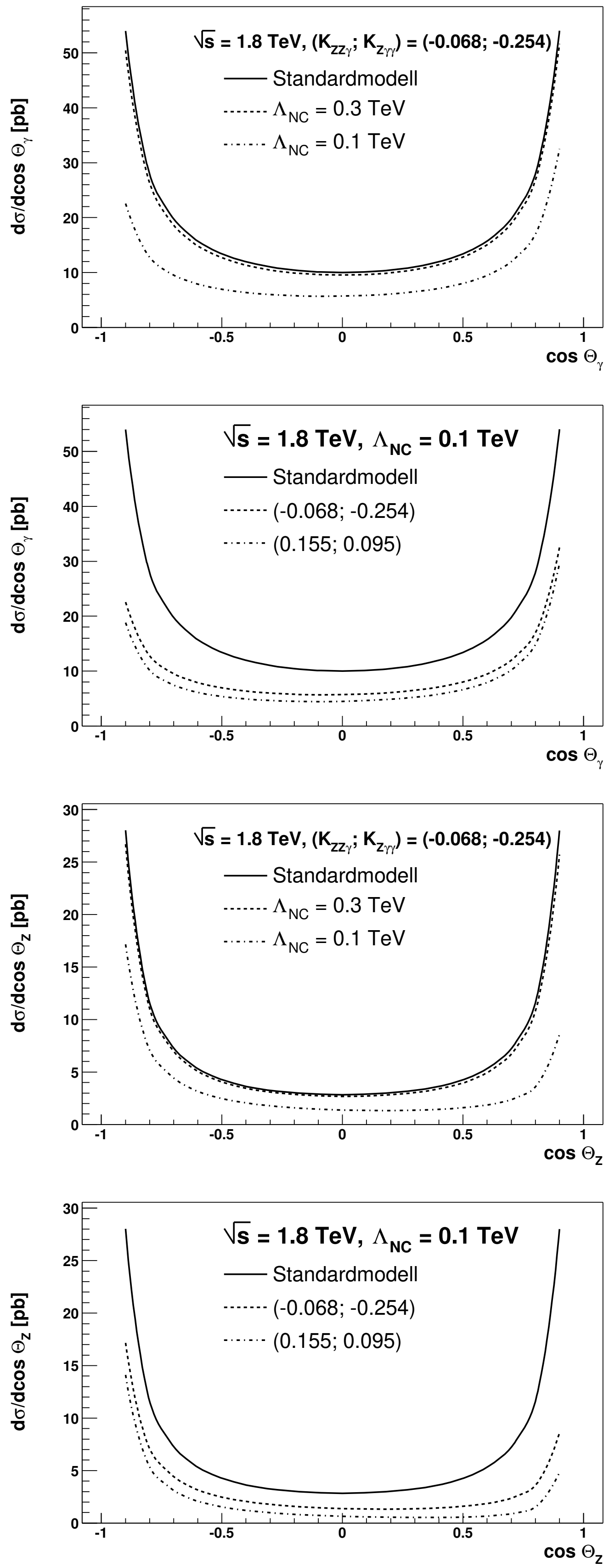


Abbildung 6.4: Diff. WQ für das Photon (*oben*) und das Z-Boson (*unten*) in Abhängigkeit der LS-Winkel, für unterschiedliche Λ_{NC} und feste $(K_{ZZ\gamma}; K_{Z\gamma\gamma})$-Werte, bzw. für festes Λ_{NC} und zwei Extremwerte der Kopplungskonstanten

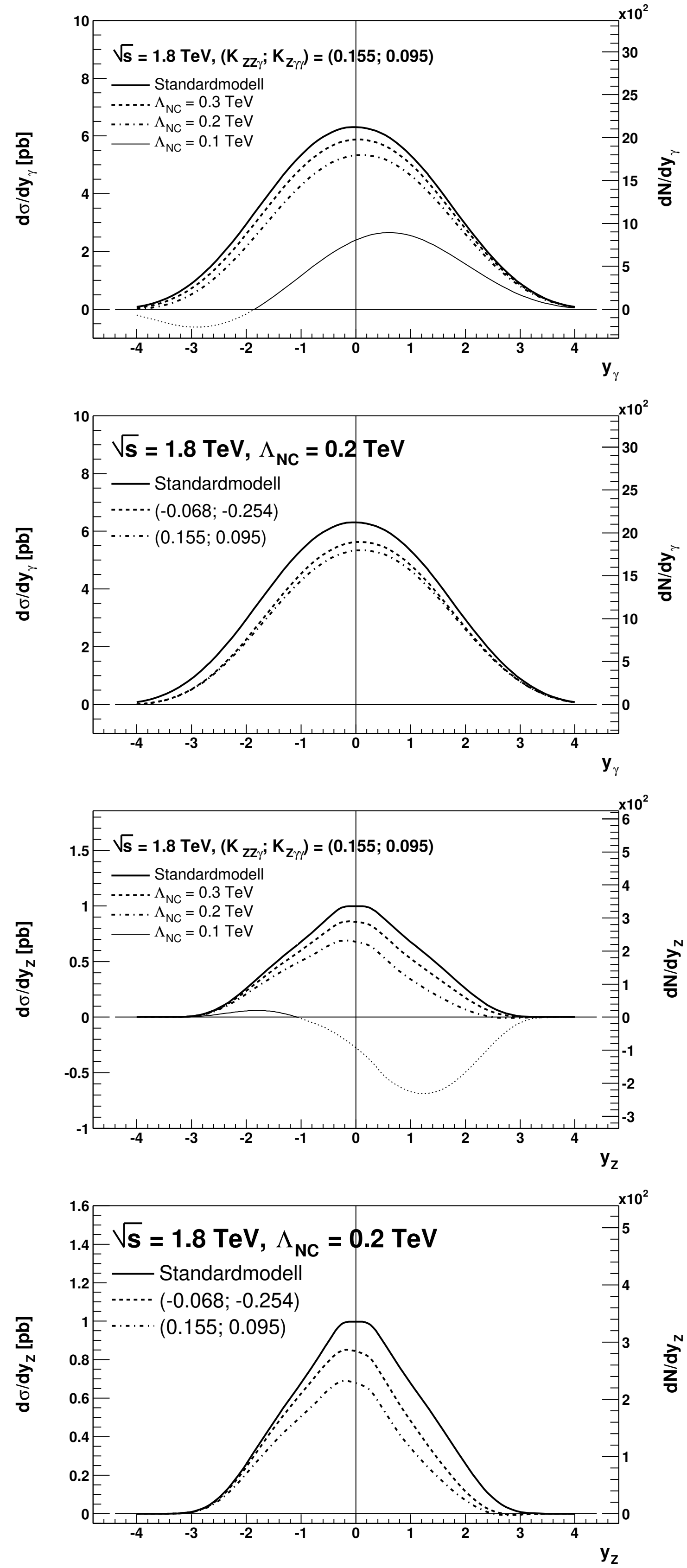


Abbildung 6.5: Diff. WQ für das Photon (*oben*) und das Z-Boson (*unten*) in Abhängigkeit der (Pseudo-)Rapiditäten, für unterschiedliche Λ_{NC} und feste $(K_{ZZ\gamma}; K_{Z\gamma\gamma})$-Werte, bzw. für festes Λ_{NC} und zwei Extremwerte der Kopplungskonstanten. N bezeichnet die Anzahl der Ereignisse (s. Abschnitt 6.3.4). Negative (folglich physikalisch nicht zulässige) WQ wurden mit gepunkteter Linie dargestellt

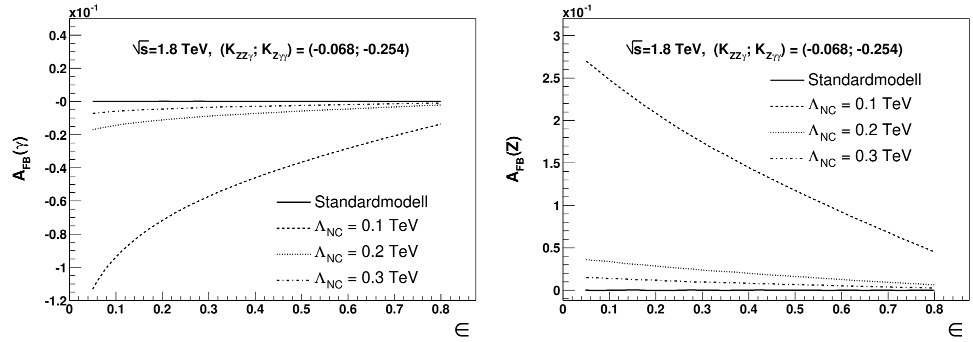


Abbildung 6.6: Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie für das Photon(*rechts*) und das Z-Boson (*links*) in Abhängigkeit des Abschneideparameters ϵ, für unterschiedliche Λ_{NC} und feste $(K_{ZZ\gamma}; K_{Z\gamma\gamma})$-Werte, unter der Bedingung $\sqrt{x_1 x_2 s} > m_Z$

gesetzt, mit ω aus (6.10). Abb. 6.5 zeigt das Verhalten des diff. WQs als Funktion der Rapidität für Photonen, deren Transversalimpuls $p_\perp > 10\,\text{GeV}$ beträgt, und für Z-Bosonen mit $p_\perp > 40\,\text{GeV}$.

Offensichtlich ist hier mit $\Lambda_{NC} = 0.1\,\text{TeV}$ die NC-Skala zu niedrig angesetzt worden, so dass das Verhalten bezüglich der Kopplungskonstanten bei einer NC-Skala von $\Lambda_{NC} = 0.2\,\text{TeV}$ untersucht wurde.

Der Verlauf des WQs ist im Vergleich zu demjenigen in Abschnitt 5.4 anders, was an den unterschiedlich gewählten kinematischen Schnitten liegt. Hier wurden die Schnitte bezüglich des Transversalimpulses gesetzt, während im Fall des partonischen WQs die kinematischen Schnitte durch $\sqrt{\hat{s}} = \sqrt{x_1 x_2 s} > 100\,\text{GeV}$ gegeben wurden. Dadurch werden verschiedene Bereiche des Phasenraums untersucht.

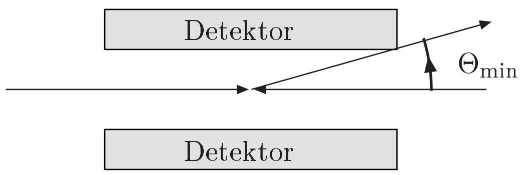
Untersucht man den diff. WQ anhand seiner Abhängigkeit von der Photonrapidität, so ist aus Abb. 6.5 ersichtlich, dass ab Rapiditäten bzw. Pseudorapiditäten $|\eta| \gtrsim 3$ dieser nicht mehr von den Kopplungskonstanten abhängt. Wie in Kap. 5 angesprochen, liefert diese Tatsache eine Möglichkeit den Wert der NC-Skala Λ_{NC} einzuschränken, obwohl das Messen von Observablen in diesem Pseudorapiditätenbereich schwierig ist. Am Tevatron deckt der D0-Detektor einen Bereich von $|\eta| < 1.1$ im zentralen Kalorimeter und einen Bereich von $|\eta| < 4.4$ im Endkalorimeter ab, so dass dieser Effekt, falls die NC-Skala in diesem Energiebereich liegen sollte, trotzdem messbar wäre.

6.3.3 Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie

Die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie, die im nichtkommutativen Fall des partonischen Prozesses auftritt, ist im hadronischen Wirkungsquerschnitt wiederzufinden. Da nun das $q\bar{q}$-System in Strahlrichtung geboostet wurde, ist die FBA für das masselose Photon und das massive Z nicht mehr gleich groß. Stellt man $A_{\text{FB}}(\epsilon)$ grafisch dar (Abb. 6.6), so sieht man, dass auch hier die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie umso größer wird, je kleiner der Abschneideparameter ϵ gewählt wird. Für ϵ muss folglich der kleinstmögliche, durch den Detektoraufbau

$\mathbf{\Lambda_{NC}}$**[TeV]**		**0.3**	**0.3**	**0.3**	**0.3**
$K_{ZZ\gamma}$		0.0	0.0	-0.068	0.155
$K_{Z\gamma\gamma}$		-0.1487	-0.338	-0.254	0.095
$A_{FB}(\gamma)$	$\times 10^{-2}$	-0.733	-0.723	-0.71	-0.792
Fehler	$\times 10^{-4}$	4.279	4.272	4.267	4.308
$A_{FB}(Z)$	$\times 10^{-2}$	1.565	1.326	1.283	1.766
Fehler	$\times 10^{-4}$	9.794	11.33	12.18	10.35
$\mathbf{\Lambda_{NC}}$**[TeV]**		**0.2**	**0.2**	**0.2**	**0.2**
$K_{ZZ\gamma}$		0.0	0.0	-0.068	0.155
$K_{Z\gamma\gamma}$		-0.1487	-0.338	-0.254	0.095
$A_{FB}(\gamma)$	$\times 10^{-2}$	-1.775	-1.737	-1.710	-1.937
Fehler	$\times 10^{-4}$	4.331	4.314	4.303	4.40
$A_{FB}(Z)$	$\times 10^{-2}$	3.843	3.617	3.919	4.285
Fehler	$\times 10^{-4}$	11.05	11.37	15.12	11.06

Tabelle 6.1: Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie für einen Abschneideparameter von $\epsilon = 0.005$, jeweils für das Photon und das Z-Boson



zugelassene Wert gewählt werden. Hier wurde von einem miminalen Wert für den noch messbaren Streuwinkel von

$$\Theta_{\text{min}} \approx 100\,\text{mrad} \simeq 5.73\,\text{Grad} \quad \Rightarrow \quad \epsilon \approx 0.005 \tag{6.24}$$

ausgegangen. Damit wurde die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie für verschiedene Werte des NC-Parameters Λ_{NC} und der Kopplungen $K_{ZZ\gamma}$ und $K_{Z\gamma\gamma}$ berechnet und in Tabelle 6.1 dargestellt.
Die FBA des Photons liegt bei ungefähr $(-0.7 \pm 0.04)\%$ für $\Lambda_{NC} = 0.3\,\text{TeV}$ und bei ca. $(-1.7 \pm 0.04)\%$ für $\Lambda_{NC} = 0.2\,\text{TeV}$. Die FBA im Falle des Z-Bosons ist größer: $(1.5 \pm 0.11)\%$ für $\Lambda_{NC} = 0.3\,\text{TeV}$ und $(3.8 \pm 0.13)\%$ für $\Lambda_{NC} = 0.2\,\text{TeV}$. Die Fehler ergeben sich aus der numerischen Integration.

6.3.4 Integrierter Wirkungsquerschnitt

Den integrierten Wirkungsquerschnitt erhält man, durch Integration von (6.16) über $\cos\Theta_{Z/\gamma}$:

$$\sigma = \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\Theta_{Z/\gamma}} \right) \mathrm{d}\cos\Theta_{Z/\gamma}\,. \tag{6.25}$$

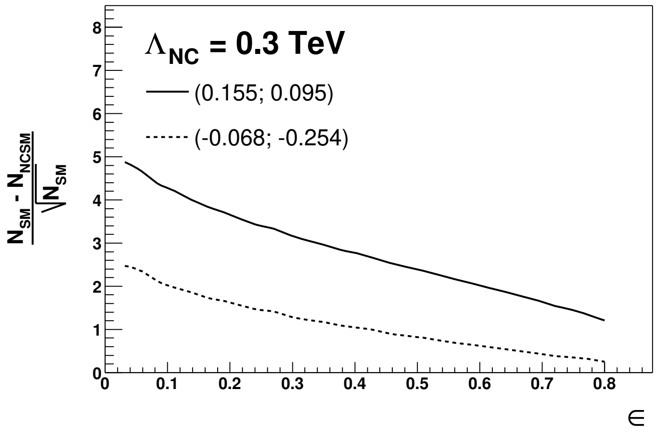


Abbildung 6.7: Die Abweichung der NC-Ereignisanzahl von derjenigen des SMs als Funktion des Abschneideparameters

Nun kann die Ereignisrate (d. h. die Anzahl der Ereignisse pro Zeiteinheit) für den Prozess $p\bar{p} \to Z\gamma$ berechnet werden:

$$\mathcal{N} = \sigma \cdot \mathcal{L}\,. \tag{6.26}$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{L}$ die Luminosität des Colliders. Sie gibt im Wesentlichen die Wahrscheinlichkeit für den Zusammenstoß eines Protons mit einem Antiproton an. Die Anzahl der Ereignisse in einem bestimmten Zeitintervall wird dann durch

$$N = \sigma \cdot L \tag{6.27}$$

gegeben, mit der integrierten Luminosität $L = \int \mathcal{L} dt$. Für das Tevatron kann bis 2008, wenn der LHC erste Daten bei Schwerpunktsenergien von 14 TeV liefern soll, mit einer integrierten Luminosität von $2 - 5\,\mathrm{fb}^{-1}$ gerechnet werden. In der vorliegenden Arbeit wurde ein Wert von $L = 5\,\mathrm{fb}^{-1}$ angenommen.
Da der experimentelle Nachweis des Z-Bosons nur über dessen Zerfall, beispielsweise in e^+e^- oder in $\mu^+\mu^-$ erfolgen kann, muss die Zahl der $(p\bar{p} \to Z\gamma)$-Ereignisse mit dem entsprechenden Verzweigungsverhältnis multipliziert werden. Hier wurden nur diese beiden Zerfallsmöglichkeiten des Z-Bosons berücksichtigt:

$$N = \sigma_{p\bar{p}\to Z\gamma} \cdot L \cdot \frac{\Gamma(e^+e^-) + \Gamma(\mu^+\mu^-)}{\Gamma}\,, \tag{6.28}$$

wobei $\Gamma(l^+l^-)$ die Z-Zerfallsbreite in Leptonen und Γ die gesamte Zerfallsbreite des Z-Bosons ist.

Die Integrationsgrenzen für (6.25) werden durch $\epsilon = 0.005$ gegeben, was einem minimalen Winkel von ca. 6 Grad entspricht. Es wurde mit dem kleinstmöglichen Wert für den Abschneideparameter ϵ gerechnet, da die Abweichungen des NC-WQs vom SM-WQ umso größer werden, je kleiner ϵ gewählt wird, wie Abb. 6.7 zeigt. Hier wurde für eine NC-Skala $\Lambda_{NC} = 0.3\,\mathrm{TeV}$ und für zwei

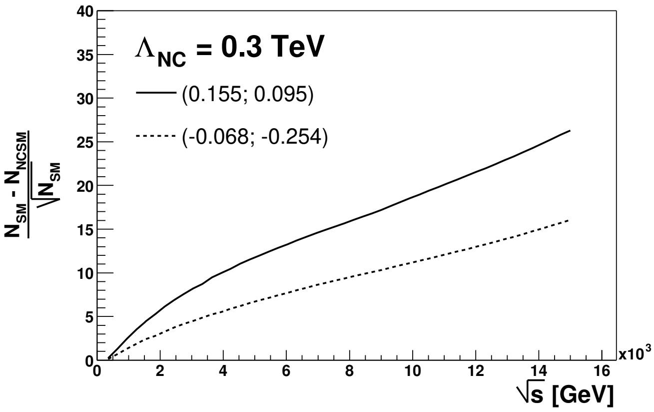


Abbildung 6.8: Die Abweichung vom SM-Untergrund als Funktion der Schwerpunktsenergie für zwei Extremwerte der Kopplungskonstanten bei $\Lambda_{NC} = 0.3$ TeV

Extremwerte der Kopplungskonstanten die Größe

$$\frac{N_{\rm SM} - N_{\rm NCSM}}{\sqrt{N_{\rm SM}}} \tag{6.29}$$

gegen ϵ aufgetragen.
Mit Hilfe dieser Größe kann abgeschätzt werden, ob das nichtkommutative Signal von dem (SM-)Untergrundsignal noch zu unterscheiden ist, indem die Differenz der berechneten Ereigniszahlen $N_{\rm SM} - N_{\rm NCSM}$ mit dem statistischen Fehler $\Delta_{\rm stat} N_{\rm SM} \approx \sqrt{N_{\rm SM}}$ verglichen wird. Ist

$$N_{\rm SM} - N_{\rm NCSM} > \Delta_{\rm stat} N_{\rm SM}\,, \qquad \text{also} \qquad \frac{N_{\rm SM} - N_{\rm NCSM}}{\sqrt{N_{\rm SM}}} > 1\,,$$

so besteht die Möglichkeit, die Abweichung vom SM-Untergrund messen zu können.
In Abb. 6.9 und 6.10 wird die Ereignisanzahl (6.28) als Funktion der Schwerpunktsenergie dargestellt. Die kinematischen Schnitte bezüglich des Transversalimpulses sind von $p_\perp > 10\,\text{GeV}$ für das Photon und von $p_\perp > 40\,\text{GeV}$ für das Z-Boson. In Abb. 6.9 wird der integrierte WQ für verschiedene Werte der NC-Skala dargestellt.
Je größer die Werte für die NC-Skala Λ_{NC} sind, desto geringer werden für eine feste Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$ die Abweichungen zum SM und desto schwieriger wird der Nachweis nichtkommutativer Effekte sein. Bei einer großen NC-Skala müssen folglich große Schwerpunktsenergien aufgebracht werden. Ab $\sqrt{s} \simeq 8\,\text{TeV}$ wird für $\Lambda_{NC} = 0.2\,\text{TeV}$ der WQ negativ, so dass ab dieser Schwerpunktsenergie Terme höherer Ordnung in $\theta = 1/\Lambda_{NC}^2$ nicht mehr vernachlässigt werden dürfen.
Die Abweichung der Ereignisanzahl im nichtkommutativen Fall von derjenigen des SMs wird mit zunehmender Schwerpunktsenergie immer größer. In Abb. 6.8 wird die Abweichung (6.29), diesmal als Funktion der Schwerpunktsenergie, für zwei Extremwerte der Kopplungskonstanten bei $\Lambda_{NC} = 0.3\,\text{TeV}$ dargestellt.

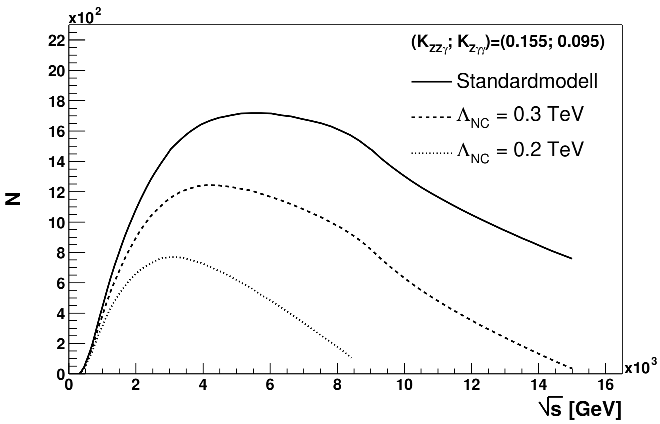


Abbildung 6.9: Zahl der Ereignisse für unterschiedliche Werte der NC-Skala Λ_{NC} und für einen festen $(K_{ZZ\gamma}; K_{Z\gamma\gamma})$-Wert

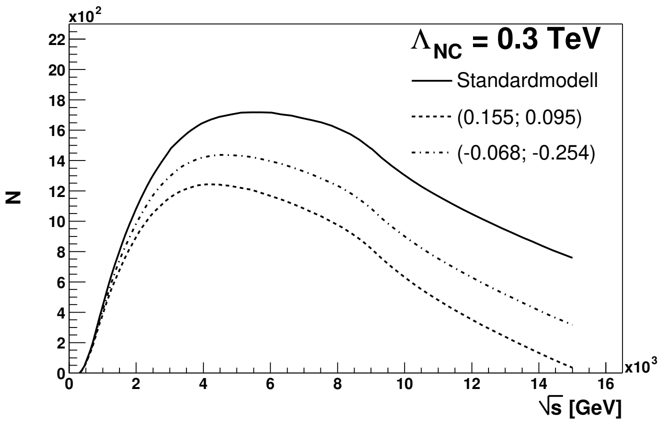


Abbildung 6.10: Zahl der Ereignisse bei $\Lambda_{NC} = 0.3\,\text{TeV}$ und bei zwei Extremwerten der Kopplungskonstanten

$\boldsymbol{\Lambda_{NC}}$**[TeV]**	**0.3**	**0.3**	**0.3**	**0.3**	**0.3**	**0.3**
$K_{ZZ\gamma}$	0.0945	0.19993	0.0	0.0	-0.068	0.155
$K_{Z\gamma\gamma}$	0.0	0.0	-0.1487	-0.338	-0.254	0.095
N	836	816	871	884	892	818
$(N_{\text{SM}} - N_{\text{NCSM}})/\sqrt{N_{\text{SM}}}$	4.6	5.2	3.5	3.0	2.8	5.1

Tabelle 6.2: Die Ereignisanzahl für den NC-Prozess $p\bar{p} \to Z\gamma$ und deren Abweichung vom SM-Untergrund für verschiedene Werte der Kopplungskonstanten und bei $\Lambda_{NC} = 0.3\,\text{TeV}$

Die Anzahl der Ereignisse bei $\sqrt{s} = 1.8\,\mathrm{TeV}$, aufintegriert bis zum Jahr 2008, wurden für das Photon und für das Z-Boson bei $\Lambda_{NC} = 0.3\,\mathrm{TeV}$ und unterschiedlichen Werten der Kopplungskonstanten berechnet und in Tabelle 6.2 zusammengefasst. Der SM-Untergrund liegt bei $N = 979$ für Schwerpunktsenergien von $\sqrt{s} = 1.8\,\mathrm{TeV}$. Damit wurde die Abweichung (6.29) der Ereigniszahl für den nichtkommutativen Prozess von der Anzahl der SM-Ereignisse berechnet und ebenfalls in Tabelle 6.2 eingetragen.
Da der Wert der Abweichungen größer als Eins ist, sind nichtkommutative Effekte, falls deren Energie-Skala bei 0.3 TeV liegt, im Prinzip experimentell nachweisbar. Die hier vorgeführten Ergebnisse berücksichtigen weitere experimentell bedingte Effekte, wie beispielsweise die Trigger- und die Detektor-Effizienz, nicht. Diese führen im Allgemeinen zu einer Verringerung der Wahrscheinlichkeit für die Messung der betrachteten Observablen. Es kann davon ausgegangen werden, dass die Berücksichtigung der Effizienzen die Anzahl der Ereignisse auf ein Viertel reduziert. Die Abweichungen betragen dann nur noch die Hälfte der in Tabelle 6.2 angegebenen Werte. Eine detaillierte Berücksichtigung der Effizienzen geht jedoch über den Rahmen dieser Diplomarbeit hinaus und soll hier nicht weiter verfolgt werden. Trotzdem kann an dieser Stelle, anhand der Ergebnisse aus Tabelle 6.2, behauptet werden, dass die Untersuchung nichtkommutativer Effekte bei Schwerpunktsenergien, die am Tevatron heute erreichbar sind, durchaus sinnvoll ist. Falls die NC-Skala bei ca. 0.3 TeV liegt, bietet der Prozess $p\bar{p} \to Z\gamma$ die Möglichkeit, eine eventuell vorhandene Nichtkommutativität der Raumzeit bei dieser Skala experimentell nachzuweisen.

Kapitel 7

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde der Prozess $p\bar{p} \to Z\gamma$ auf nichtkommutative Effekte in erster Ordnung der NC-Skala $\theta^{\mu\nu} = C^{\mu\nu}/\Lambda_{NC}^2$ bei Tevatron-Schwerpunktsenergien hin untersucht.

Quantenfeldtheorien auf einer nichtkommutativen Raumzeit ergeben sich als niederenergetischer Grenzfall im Rahmen der Stringtheorie, sie können aber unabhängig davon als in sich abgeschlossene Theorien betrachtet und untersucht werden. Die vorgeschlagenen Ansätze zur Beschreibung von NCQFT kämpfen jedoch mit Probleme bezüglich der Unitarität, bezüglich der Unverträglichkeit einer quantisierten NCQED-Ladung mit der Erfüllung der Ward-Identität oder bezüglich der nichtkommutativen Erweiterung der SM $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$-Eichgruppe. Im ersten Teil der Arbeit wurde ein Modell vorgestellt, das eine Lösung für einige dieser Schwierigkeiten bietet: so wird das Ladungsproblem behoben und die nichtkommutative Erfassung der gesamten SM-Eichgruppe ermöglicht, indem die Lie-Algebra durch ihre universelle einhüllende Algebra ersetzt wird. Die sich daraus ergebenden unendlich vielen Freiheitsgrade werden durch die Seiberg-Witten-Abbildungen auf die richtige Anzahl der SM-Größen reduziert. Mit Hilfe der SWMs und des Moyal-Weyl-Sternprodukts kann die NC-Lagrangedichte durch die kommutativen Felder ausgedrückt werden, wobei Wechselwirkungsterme impulsabhängige Phasenfaktoren erhalten und im SM verbotene Kopplungen erlaubt werden, wie z. B. die für den hier betrachteten Prozess relevanten neutralen Drei-Eichbosonen-Kopplungen. Aufgrund der Freiheit in der Wahl der Spur sind hierfür die Kopplungskonstanten nicht mehr eindeutig festgelegt, sondern können innerhalb eines durch den kommutativen Grenzfall bestimmten Intervalls variieren.

Aus dieser neuen Lagrangedichte wurden in der vorliegenden Arbeit zunächst die Feynman-Regeln hergeleitet, damit der diff. WQ für den partonischen Prozess $q\bar{q} \to Z\gamma$ und anschließend, durch Konvolution mit den PDFs, der hadronische Prozess $p\bar{p} \to Z\gamma$ berechnet. Dabei wurde die weiterhin bestehende Gültigkeit der Ward-Identität anhand des partonischen Prozesses bewiesen. Die im Vergleich zum SM-Prozess zusätzlich beitragenden Diagramme führen zum Auftreten einer Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie, welche im SM nicht vorhanden ist und dadurch eine gute Observable zur Messung nichtkommutativer Ef-

fekte darstellt. Der betrachtete Prozess ist in erster Ordnung θ nur auf zeitartige Komponenten in Strahlrichtung des durch θ beschriebenen Hintergrundfeldes sensitiv. Sind diese Null, müssen weitere Ordnungen in θ berücksichtigt werden. Die Wirkungsquerschnitte wurden für unterschiedliche Werte der Kopplungskonstanten für die im SM verbotenen neutralen Drei-Eichbosonon-Wechselwirkungen berechnet. Für große Rapiditäten bzw. kleine Streuwinkel hängt der Wirkungsquerschnitt hauptsächlich von der NC-Skala ab, so dass dadurch die Möglichkeit gegeben wird, unabhängig von den Kopplungen, die NC-Skala experimentell zu ermitteln.
Bei der Berechnung der WQs wurde von am Tevatron erreichbaren Schwerpunktsenergien von $\sqrt{s} = 1.8\,\text{TeV}$ ausgegangen. Es hat sich dabei herausgestellt, dass eine NC-Skala von $\Lambda_{NC} = 0.1\,\text{TeV}$ zu negativen WQs führt und dadurch zu klein angesetzt wurde. Es wurde weiterhin von einem Mindestwert von $\Lambda_{NC} = 0.2\,\text{TeV}$ ausgegangen, was konsistent mit der experimentell festgelegten unteren Schranke von 141 GeV ist. Es konnte gezeigt werden, dass bei einer Skala von $\Lambda_{NC} = 0.3\,\text{TeV}$ der Prozess $p\bar{p} \to Z\gamma$ auf einer nichtkommutativen Raumzeit experimentell nachweisbare Abweichungen vom SM-Untergrund liefert. Je größer die Skala der Nichtkommutativität ist, desto kleiner werden die Abweichungen vom SM. Größere Schwerpunktsenergien, wie sie beispielsweise ab 2008 am LHC erreicht werden können, bieten die Möglichkeit, bei höheren NC-Skalen nach nichtkommutativen Effekten zu suchen.

Anhang A

Lagrangedichten

A.1 Neutrale Ströme

In diesem Anhang wird die Lagrangedichte für die neutralen Ströme in erster Ordnung θ explizit angegeben [4].
Man erhält sie aus (3.42), indem man die SWM (3.38) und (3.14c) für die Felder und (3.40) für den Feldstärketensor einsetzt, das Sternprodukt ausführt und schließlich die Lagrangedichte durch die Masseneigenzustände ausdrückt. Die Eichfelder $\mathcal{A}_\mu$ und B_μ lassen sich folgendermaßen durch die physikalischen Felder ausdrücken:

$$B_\mu^{1,2} = \frac{W_\mu^+ \pm W_\mu^-}{\sqrt{2}}\,, \quad B_\mu^3 = \frac{gZ_\mu + g'A_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}}\,, \quad \mathcal{A}_\mu = \frac{gA_\mu - g'Z_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}} \tag{A.1}$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{NC}} = \mathcal{L}_{\mathrm{NC}}^{\mathrm{SM}} - i\frac{1}{2}\sum_i \bar{u}_L^{(i)} \left(\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\gamma^\alpha + \theta^{\nu\alpha}\gamma^\mu\right)& \\
\Bigg(\bigg(\cos\theta_W \partial_\mu A_\nu - \cos\theta_W \partial_\nu A_\mu - \sin\theta_W \partial_\mu Z_\nu + \sin\theta_W \partial_\nu Z_\mu\bigg)& \\
\bigg(g'Y\partial_\alpha - iY^2 g'^2 \cos\theta_W A_\alpha + iY^2 g'^2 \sin\theta_W Z_\alpha - i\frac{1}{2}Yg'g\cos\theta_W Z_\alpha& \\
- i\frac{1}{2}Yg'g\sin\theta_W A_\alpha\bigg) + \frac{1}{2}\bigg(\cos\theta_W \partial_\mu Z_\nu - \cos\theta_W \partial_\nu Z_\mu + \sin\theta_W \partial_\mu A_\nu& \\
- \sin\theta_W \partial_\nu A_\mu - 2ig(W_\mu^+ W_\nu^- - W_\nu^+ W_\mu^-)\bigg)\bigg(g\partial_\alpha - iYg'g\cos\theta_W A_\alpha& \\
+ iYg'g\sin\theta_W Z_\alpha - \frac{1}{2}ig^2\cos\theta_W Z_\alpha - \frac{1}{2}ig^2 \sin\theta_W A_\alpha\bigg)& \\
- \frac{i}{2}g^2\bigg(\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+ - 2ig\left(\cos\theta_W Z_\mu W_\nu^+ + \sin\theta_W A_\mu W_\nu^+\right.& \\
\left. -W_\mu^+ \cos\theta_W Z_\nu - W_\mu^+ \sin\theta_W A_\nu\right)\bigg) W_\alpha^-\Bigg) u_L^{(i)}&
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- i\frac{1}{2}\sum_i \bar{u}_R^{(i)} \left(\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\gamma^\alpha + \theta^{\nu\alpha}\gamma^\mu\right) \\
&\Bigg(\bigg(\cos\theta_W \partial_\mu A_\nu - \cos\theta_W \partial_\nu A_\mu - \sin\theta_W \partial_\mu Z_\nu + \sin\theta_W \partial_\nu Z_\mu\bigg) \\
&\bigg(g' Y \partial_\alpha - iY^2 g'^2 \cos\theta_W A_\alpha + iY^2 g'^2 \sin\theta_W Z_\alpha\bigg)\Bigg) u_R^{(i)} \\
&- i\frac{1}{2}\sum_i \bar{d}_L^{(i)} \left(\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\gamma^\alpha + \theta^{\nu\alpha}\gamma^\mu\right) \\
&\Bigg(\bigg(\cos\theta_W \partial_\mu A_\nu - \cos\theta_W \partial_\nu A_\mu - \sin\theta_W \partial_\mu Z_\nu + \sin\theta_W \partial_\nu Z_\mu\bigg) \\
&\bigg(g' Y \partial_\alpha - iY^2 g'^2 \cos\theta_W A_\alpha + iY^2 g'^2 \sin\theta_W Z_\alpha - i\frac{1}{2} Y g' g \cos\theta_W Z_\alpha \\
&- i\frac{1}{2} Y g' g \sin\theta_W A_\alpha\bigg) - \frac{1}{2}\bigg(\cos\theta_W \partial_\mu Z_\nu - \cos\theta_W \partial_\nu Z_\mu + \sin\theta_W \partial_\mu A_\nu \\
&- \sin\theta_W \partial_\nu A_\mu - 2ig(W_\mu^+ W_\nu^- - W_\nu^+ W_\mu^-)\bigg)\bigg(g\partial_\alpha - iY g' g \cos\theta_W A_\alpha \\
&+ iY g' g \sin\theta_W Z_\alpha + \frac{1}{2} i g^2 \cos\theta_W Z_\alpha + \frac{1}{2} i g^2 \sin\theta_W A_\alpha\bigg) \\
&- \frac{i}{2} g^2 \bigg(\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^- + 2ig\left(\cos\theta_W Z_\mu W_\nu^- + \sin\theta_W A_\mu W_\nu^-\right. \\
&\left. - W_\mu^- \cos\theta_W Z_\nu - W_\mu^- \sin\theta_W A_\nu\right)\bigg) W_\alpha^+ \Bigg) d_L^{(i)} \\
&- i\frac{1}{2}\sum_i \bar{d}_R^{(i)} \left(\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\gamma^\alpha + \theta^{\nu\alpha}\gamma^\mu\right) \\
&\Bigg(\bigg(\cos\theta_W \partial_\mu A_\nu - \cos\theta_W \partial_\nu A_\mu - \sin\theta_W \partial_\mu Z_\nu + \sin\theta_W \partial_\nu Z_\mu\bigg) \\
&\bigg(g' Y \partial_\alpha - iY^2 g'^2 \cos\theta_W A_\alpha + iY^2 g'^2 \sin\theta_W Z_\alpha\bigg)\Bigg) d_R^{(i)} .
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

A.2 Eichsektor

Dieser Abschnitt enthält die Eichsektor-Lagrangedichte des nichtminimalen NCSM [17, 21]. Sie ergibt sich aus

$$
S_{\mathrm{gauge}} = -\frac{1}{2}\int d^4x \, \mathbf{Tr} \frac{1}{\mathbf{G}^2} \widehat{F}_{\mu\nu} \star \widehat{F}^{\mu\nu} , \tag{A.3}
$$

indem in der Spur über sämtliche Teilchen des Modells summiert wird:

$$
\begin{aligned}
S_{\text{gauge}} = & -\frac{1}{4}\int d^4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad \text{(A.4)}\\
& -\frac{1}{2}\int d^4x\,\mathrm{Tr}\,(B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}\int d^4x\,\mathrm{Tr}\,(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu})\\
& + g_s\,\theta^{\rho\tau}\!\int d^4x\,\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{4}G_{\rho\tau}G_{\mu\nu} - G_{\mu\rho}G_{\nu\tau}\right)G^{\mu\nu}\\
& + g'^3\kappa_1\theta^{\rho\tau}\!\int d^4x\,\left(\frac{1}{4}F_{\rho\tau}F_{\mu\nu} - F_{\mu\rho}F_{\nu\tau}\right)F^{\mu\nu}\\
& + g'g^2\kappa_2\,\theta^{\rho\tau}\!\int d^4x\sum_{a=1}^{3}\left[(\frac{1}{4}F_{\rho\tau}B^a_{\mu\nu} - F_{\mu\rho}B^a_{\nu\tau})B^{\mu\nu,a} + c.p.\right]\\
& + g'g_s^2\kappa_3\,\theta^{\rho\tau}\!\int d^4x\sum_{b=1}^{8}\left[(\frac{1}{4}F_{\rho\tau}G^b_{\mu\nu} - F_{\mu\rho}G^b_{\nu\tau})G^{\mu\nu,b} + c.p.\right], ,
\end{aligned}
$$

wobei mit *c.p.* zyklische Permutationen gemeint sind. $F_{\mu\nu}$, $B^a_{\mu\nu}$ und $G^b_{\mu\nu}$ bezeichnen die Feldstärken, die sich aus den Eichfelder der $U(1)_Y$-, $SU(2)_L$- und $SU(3)_C$-Eichgruppen ergeben.
κ_1, κ_2 und κ_3 sind Konstanten, die aus der Spur über die Gruppengeneratoren in der oben erwähnten Darstellung folgen:

$$
\begin{aligned}
\kappa_1 = \mathbf{Tr}\frac{1}{\mathbf{G}^2}Y^3 &= -\frac{1}{g_1^2} - \frac{1}{4g_2^2} + \frac{8}{9g_3^2} - \frac{1}{9g_4^2} + \frac{1}{36g_5^2} + \frac{1}{4g_6^2}\,, && \text{(A.5a)}\\
\kappa_2 = \mathbf{Tr}\frac{1}{\mathbf{G}^2}YT^a_LT^b_L &= \frac{1}{2}\delta^{ab}\left(-\frac{1}{2g_2^2} + \frac{1}{2g_5^2} + \frac{1}{2g_6^2}\right), && \text{(A.5b)}\\
\kappa_3 = \mathbf{Tr}\frac{1}{\mathbf{G}^2}YT^c_CT^d_C &= \frac{1}{2}\delta^{cd}\left(\frac{2}{3g_3^2} - \frac{1}{3g_4^2} + \frac{1}{3g_5^2}\right). && \text{(A.5c)}
\end{aligned}
$$

Werden die Eichfelder durch die physikalischen Felder A, Z und G ausgedrückt, so sind die Wechselwirkungsterme zwischen diesen in erster Ordnung θ:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\gamma\gamma\gamma} &= \frac{e}{4}\sin 2\theta_W\,\mathrm{K}_{\gamma\gamma\gamma}\theta^{\rho\tau}A^{\mu\nu}\left(A_{\mu\nu}A_{\rho\tau} - 4A_{\mu\rho}A_{\nu\tau}\right), && \text{(A.6a)}\\
\mathrm{K}_{\gamma\gamma\gamma} &= \frac{1}{2}\,gg'(\kappa_1 + 3\kappa_2)\,;\\
\\
\mathcal{L}_{Z\gamma\gamma} &= \frac{e}{4}\sin 2\theta_W\,\mathrm{K}_{Z\gamma\gamma}\,\theta^{\rho\tau}\left[2Z^{\mu\nu}\left(2A_{\mu\rho}A_{\nu\tau} - A_{\mu\nu}A_{\rho\tau}\right)\right.\\
&\quad \left. + 8Z_{\mu\rho}A^{\mu\nu}A_{\nu\tau} - Z_{\rho\tau}A_{\mu\nu}A^{\mu\nu}\right], && \text{(A.6b)}\\
\mathrm{K}_{Z\gamma\gamma} &= \frac{1}{2}\left[g'^2\kappa_1 + \left(g'^2 - 2g^2\right)\kappa_2\right];\\
\\
\mathcal{L}_{ZZ\gamma} &= \mathcal{L}_{Z\gamma\gamma}(A \leftrightarrow Z)\,, && \text{(A.6c)}\\
\mathrm{K}_{ZZ\gamma} &= \frac{-1}{2gg'}\left[g'^4\kappa_1 + g^2\left(g^2 - 2g'^2\right)\kappa_2\right];\\
\\
\mathcal{L}_{ZZZ} &= \mathcal{L}_{\gamma\gamma\gamma}(A \rightarrow Z)\,, && \text{(A.6d)}
\end{aligned}
$$

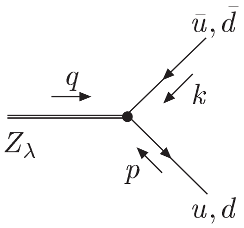
$$
\begin{aligned}
\mathrm{K}_{ZZZ} &= \frac{-1}{2g^2}\left[g'^4\kappa_1 + 3g^4\kappa_2\right]\,; \\[1em]
\mathcal{L}_{Zgg} &= \mathcal{L}_{Z\gamma\gamma}(A \to G^b)\,, && \text{(A.6e)} \\
\mathrm{K}_{Zgg} &= \frac{g_s^2}{2}\left[1 + (\frac{g'}{g})^2\right]\kappa_3\,; \\[1em]
\mathcal{L}_{\gamma gg} &= \mathcal{L}_{Zgg}(Z \to A)\,, && \text{(A.6f)} \\
\mathrm{K}_{\gamma gg} &= \frac{-g_s^2}{2}\left[\frac{g}{g'} + \frac{g'}{g}\right]\kappa_3\,,
\end{aligned}
$$

mit den Abkürzungen $A_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ usw. Der Vollständigkeit halber wurden hier auch die Wechselwirkungen, die Gluonen enthalten, angegeben. Wichtig für diese Arbeit sind jedoch Gleichungen (A.6b) und (A.6c).

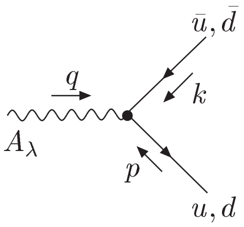
Anhang B

Vertizes in erster Ordnung θ

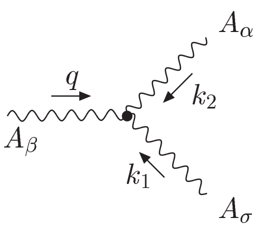
Dieser Abschnitt enthält die Feynman-Regeln für die Vertizes, die sich aus den Lagrangedichten (A.2) und (A.5) (Anhang A.1 bzw. A.2) ergeben, und deren Herleitung in Kapitel 4 vorgeführt wurde:



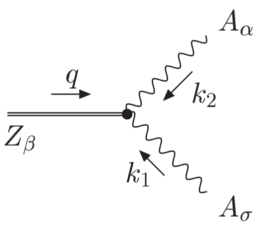
$$-\,\mathrm{i}\frac{g}{2\cos\theta_W}(g_V+g_A\gamma^5)\left[\gamma^\lambda+\frac{p\theta q}{2}\gamma^\lambda-\left(\frac{p\theta^\lambda}{2}\not{q}-\frac{q\theta^\lambda}{2}\not{p}\right)\right] \tag{B.1a}$$



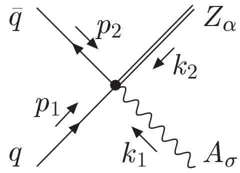
$$-\mathrm{i}\,Q_q\,e\left[\gamma^\lambda+\frac{p\theta q}{2}\gamma^\lambda-\left(\frac{p\theta^\lambda}{2}\not{q}-\frac{q\theta^\lambda}{2}\not{p}\right)\right]$$



$$+\mathrm{i}\,2\,e\sin(2\theta_W)K_{\gamma\gamma\gamma}\cdot V_{\alpha\beta\sigma}$$



$$-\mathrm{i}\,2\,e\sin(2\theta_W)K_{Z\gamma\gamma}\cdot V_{\alpha\beta\sigma}$$



$$\mathrm{i}\, Q_q\, e\frac{g}{2\cos\theta_W}(g_V + g_A\gamma^5)$$
$$\left[\frac{k_1\theta_\sigma}{2}\gamma_\alpha + \frac{{}_\sigma\theta_\alpha}{2}\not{k}_1 - \frac{k_1\theta_\alpha}{2}\gamma_\sigma + \frac{k_2\theta_\alpha}{2}\gamma_\sigma + \frac{{}_\alpha\theta_\sigma}{2}\not{k}_2 - \frac{k_2\theta_\sigma}{2}\gamma_\alpha\right]$$

mit

$$\begin{aligned}
g_V(u) &= \frac{1}{2} - \frac{4}{3}\sin^2\theta_W \\
g_A(u) &= \frac{1}{2} \\
g_V(d) &= -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin^2\theta_W \\
g_A(d) &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{\alpha\beta\sigma} = \; & [k_1\theta_\sigma(qk_2)g_{\beta\alpha} + q\theta_\beta(k_1k_2)g_{\alpha\sigma} + k_2\theta_\alpha(qk_1)g_{\sigma\beta} \\
& -k_1\theta_\sigma q_\alpha k_{2\beta} - k_2\theta_\alpha q_\sigma k_{1\beta} - q\theta_\beta k_{2\sigma}k_{1\alpha} \\
& -{}_\alpha\theta_\sigma(qk_2)k_{1\beta} - {}_\sigma\theta_\alpha(qk_1)k_{2\beta} - {}_\alpha\theta_\beta(k_1k_2)q_\sigma \\
& -{}_\beta\theta_\alpha(qk_1)k_\sigma - {}_\beta\theta_\sigma(qk_2)k_{1\alpha} - {}_\sigma\theta_\beta(k_1k_2)q_\alpha \\
& +{}_\alpha\theta k_1(qk_2)g_{\beta\sigma} + {}_\sigma\theta k_2(qk_1)g_{\beta\alpha} + {}_\alpha\theta q(k_1k_2)g_{\beta\sigma} \\
& +{}_\beta\theta k_2(qk_1)g_{\alpha\sigma} + {}_\beta\theta k_1(qk_2)g_{\alpha\sigma} + {}_\sigma\theta q(k_1k_2)g_{\beta\alpha} \\
& +k_2\theta_\sigma q_\alpha k_{1\beta} + k_1\theta_\alpha q_\sigma k_{2\beta} + k_2\theta_\beta k_{1\alpha}q_\sigma \\
& +q\theta_\alpha k_{1\beta}k_{2\sigma} + q\theta_\sigma k_{2\beta}k_{1\alpha} + k_1\theta_\beta k_{2\sigma}q_\alpha \\
& -k_2\theta k_1 q_\alpha g_{\beta\sigma} - k_1\theta k_2 q_\sigma g_{\beta\alpha} - k_2\theta q k_{1\alpha}g_{\beta\sigma} \\
& -q\theta k_2 k_{1\beta}g_{\alpha\sigma} - q\theta k_1 k_{2\beta}g_{\alpha\sigma} - k_1\theta q k_{2\sigma}g_{\beta\alpha}]
\end{aligned}$$

Anhang C

Spurtheoreme

Alle Spuren einer ungeraden Zahl von γ-Matrizen oder einer ungeraden Zahl γ-Matrizen zusammen mit γ_5 sind 0. Für die anderen Spuren gelten:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,[\not a \not b] &= 4\,(ab) && \text{(C.1)} \\ \mathrm{Tr}\,[\not a \not b \not c \not d] &= 4\,((ab)\,(cd) - (ac)\,(bd) + (ad)\,(bc)) && \text{(C.2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,(1) &= 4 && \text{(C.3)} \\ \mathrm{Tr}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu} && \text{(C.4)} \\ \mathrm{Tr}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) &= 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) && \text{(C.5)} \\ \mathrm{Tr}\,(\gamma^5) &= 0 && \text{(C.6)} \\ \mathrm{Tr}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) &= 0 && \text{(C.7)} \\ \mathrm{Tr}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5) &= -4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} && \text{(C.8)} \\ \mathrm{Tr}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\cdots) &= \mathrm{Tr}\,(\cdots\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu\cdots) && \text{(C.9)} \\ \gamma^\mu\gamma_\mu &= 4 && \text{(C.10)} \\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu &= -2\gamma^\nu && \text{(C.11)} \\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu &= 4g^{\nu\rho} && \text{(C.12)} \\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu &= -2\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu && \text{(C.13)} \\ & && \text{(C.14)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\lambda\gamma^\chi\right] = {} & 4g^{\mu\nu}\left(g^{\rho\sigma}g^{\lambda\chi} - g^{\rho\lambda}g^{\sigma\chi} + g^{\rho\chi}g^{\sigma\lambda}\right) - \\ & - 4g^{\mu\rho}\left(g^{\nu\sigma}g^{\lambda\chi} - g^{\nu\lambda}g^{\sigma\chi} + g^{\nu\chi}g^{\sigma\lambda}\right) + \\ & + 4g^{\mu\sigma}\left(g^{\nu\rho}g^{\lambda\chi} - g^{\nu\lambda}g^{\rho\chi} + g^{\nu\chi}g^{\rho\lambda}\right) - \\ & - 4g^{\mu\lambda}\,(g^{\nu\rho}g^{\sigma\chi} - g^{\nu\sigma}g^{\rho\chi} + g^{\nu\chi}g^{\rho\sigma}) + \\ & + 4g^{\mu\chi}\left(g^{\nu\rho}g^{\sigma\lambda} - g^{\nu\sigma}g^{\rho\lambda} + g^{\nu\lambda}g^{\rho\sigma}\right) \qquad \text{(C.15)} \end{aligned}$$

$$\mathrm{Tr}\,[\not a_1 \cdots \not a_n] = (a_1a_2)\;\;\mathrm{Tr}\,[\not a_3 \cdots \not a_n]$$

$$
\begin{aligned}
&- (a_1 a_3)\ \text{Tr}\ [\not{a}_2 \not{a}_4 \cdots \not{a}_n] + \cdots \\
&\cdots + (a_1 a_n)\ \text{Tr}\ [\not{a}_2 \cdots \not{a}_{n-1}]
\end{aligned} \tag{C.16}
$$

$$
\text{Tr}\ [abcd] = \text{Tr}\ [dabc] \tag{C.17}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Tr}\ [\gamma_5] &= 0 && \text{(C.18)} \\
\text{Tr}\ [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu] &= 0 && \text{(C.19)} \\
\text{Tr}\ [\gamma_5 \not{a}_1 \not{a}_2] &= 0 && \text{(C.20)} \\
\text{Tr}\ [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma] &= 4i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} && \text{(C.21)} \\
\text{Tr}\ [\gamma_5 \not{a}_1 \not{a}_2 \not{a}_3 \not{a}_4] &= 4i\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} a_1^\alpha a_2^\beta a_3^\gamma a_4^\delta && \text{(C.22)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma^5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5 && \text{(C.23)} \\
\gamma^{0\dagger} &= \gamma^0 && \text{(C.24)} \\
\gamma^{\mu\dagger} &= \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 && \\
&= g_{\mu\nu}\gamma^\nu = \gamma_\mu && \text{(C.25)} \\
\left(\gamma^0\right)^2 &= +\mathbb{I} && \text{(C.26)} \\
\left(\gamma^1\right)^2 &= \left(\gamma^2\right)^2 = \left(\gamma^3\right)^2 = -\mathbb{I} && \text{(C.27)} \\
\gamma_5^2 &= \mathbb{I} && \text{(C.28)} \\
\left\{\gamma^\mu, \gamma^5\right\} &= 0 && \text{(C.29)} \\
\left\{\not{q}, \gamma^5\right\} &= 0 && \text{(C.30)} \\
\left\{\gamma^0, \gamma^i\right\} &= 0, \qquad i = 1, 2, 3 && \text{(C.31)} \\
\not{q}\not{q} &= q^2 \mathbb{I} && \text{(C.32)} \\
\not{q}\not{p} &= 2\,(pq) - \not{p}\not{q} && \text{(C.33)} \\
\not{q}^\dagger \gamma_0 &= \gamma_0 \not{q} && \text{(C.34)} \\
\bar{\gamma}_5 &= -\gamma_5 && \text{(C.35)}
\end{aligned}
$$

Anhang D

Konstanten

In diesem Abschnitt werden die Werte für die in Kapitel 5 und 6 bei den Rechnungen verwendeten Konstanten angegeben. Sie wurden [30] entnommen.

$$\begin{aligned}
\alpha(Q^2 = 0) &= \frac{1}{137.036} = 7.297 \times 10^{-3} && \text{(D.1)}\\
\alpha(Q^2 = m_W^2) &\approx \frac{1}{128} && \text{(D.2)}\\
m_Z &= 91.1876\,\mathrm{GeV} && \text{(D.3)}\\
\Gamma_Z &= 2.4952\,\mathrm{GeV} && \text{(D.4)}\\
\frac{\Gamma_Z(e^+e^-)}{\Gamma_Z} &= 3.363\,\% && \text{(D.5)}\\
\frac{\Gamma_Z(\mu^+\mu^-)}{\Gamma_Z} &= 3.366\,\% && \text{(D.6)}\\
\sin^2\theta_W &= 0.23113 && \text{(D.7)}
\end{aligned}$$

Damit erhält man für die Vektor- bzw. Axialvektor-Kopplungen:

$$g_V(u) = 0.1916 \quad , \quad q_A(u) = \frac{1}{2} \tag{D.8}$$

$$g_V(u) = -0.3459 \quad , \quad q_A(u) = -\frac{1}{2} \tag{D.9}$$

Der Umrechnungsfaktor von GeV-Einheiten in pbarn-Einheiten beträgt:

$$1\,\mathrm{GeV}^{-2} = 3.89 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{barn} \tag{D.10}$$

In der folgenden Tabelle sind die SM-Materiefelder und deren Ladungen zusammengefasst:

	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	$U(1)_Q$
e_R	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	-1	-1
$L_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$-1/2$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
u_R	$\mathbf{3}$	$\mathbf{1}$	$2/3$	$2/3$
d_R	$\mathbf{3}$	$\mathbf{1}$	$-1/3$	$-1/3$
$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{2}$	$1/6$	$\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$
$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$1/2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Literaturverzeichnis

[1] H. S. Snyder: *Quantized Space-Time.* Phys. Rev., 71:38, 1947.

[2] A. Connes, M. R. Douglas und A. Schwarz: *Noncommutative geometry and matrix theory: Compactification on tori.* JHEP, 02:003, 1998. hep-th/9711162.

[3] N. Seiberg und E. Witten: *String Theory and Noncommutative Geometry.* JHEP, 09:032, 1999. hep-th/9908142.

[4] X. Calmet, B. Jurco, P. Schupp, J. Wess und M. Wohlgenannt: *The Standard Model on Non-Commutative Space-Time.* Eur. Phys. J., C23:363–376, 2002. hep-ph/0111115.

[5] X. Calmet und M. Wohlgenannt: *Effective field theories on non-commutative space-time.* Phys. Rev., D68:025016, 2003. hep-ph/0305027.

[6] G. Abbiendi et. al: *Test of non-commutative QED in the process* $e^+e^- \to \gamma\gamma$ *at LEP.* Phys. Lett., B568:181–190, 2003. hep-ex/0303035.

[7] J. L. Hewett, F. J. Petriello und T. G. Rizzo: *Non-commutativity and unitarity violation in gauge boson scattering.* Phys. Rev., D66:036001, 2002. hep-ph/0112003.

[8] I. Hinchliffe und N. Kersting: *CP violation from noncommutative geometry.* Phys. Rev., D64:116007, 2001. hep-ph/0104137.

[9] A. Anisimov, T. Banks, M. Dine und M. Graesser: *Comments on non-commutative phenomenology.* Phys. Rev., D65:085032, 2002. hep-ph/0106356.

[10] Irina Mocioiu, Maxim Pospelov und Radu Roiban: *Low-energy limits on the antisymmetric tensor field background on the brane and on the non-commutative scale.* Phys. Lett., B489:390–396, 2000. hep-ph/0005191.

[11] J. Madore, S. Schraml, P. Schupp und J. Wess: *Gauge theory on non-commutative spaces.* Eur. Phys. J., C16:161–167, 2000. hep-th/0001203.

[12] J. Wess: *Non-Abelian Gauge Theories on Non-Commutative Spaces.* Commun. Math. Phys, 219:247–257, 2001.

[13] H. Weyl: *Quantenmechanik und Gruppentheorie.* Z. Physik, 46:1, 1927.

[14] M. Kontsevich: *Deformation quantization of Poisson manifolds, I.* 1997. q-alg/9709040.

[15] M. Chaichian, P. Presnajder, M. M. Sheikh-Jabbari und A. Tureanu: *Noncommutative standard model: Model building.* 2001. hep-th/0107055.

[16] M. Hayakawa: *Perturbative analysis on infrared aspects of noncommutative QED on R**4.* Phys. Lett., B478:394–400, 2000. hep-th/9912094.

[17] W. Behr, N.G. Deshpande, G. Duplančić, P. Schupp, J. Trampetić und J. Wess: *The $Z \to \gamma\gamma, gg$ Decays in the Noncommutative Standard Modell.* 2002. hep-ph/0202121.

[18] Y. Liao und K. Sibold: *Time-ordered perturbation theory on noncommutative spacetime: Basic rules.* Eur. Phys. J., C25:469–477, 2002. hep-th/0205269.

[19] Th. Ohl, R. Rückl und J. Zeiner: *Unitarity of time-like noncommutative gauge theories: The violation of Ward identities in time-ordered perturbation theory.* 2003. hep-th/0309021, to appear in Nucl. Phys. B.

[20] B. Jurco, L. Moller, S. Schraml, P. Schupp und J. Wess: *Construction of non-Abelian gauge theories on noncommutative spaces.* Eur. Phys. J., C21:383–388, 2001. hep-th/0104153.

[21] G. Duplancic, P. Schupp und J. Trampetic: *Comment on triple gauge boson interactions in the non- commutative electroweak sector.* 2003. hep-ph/0309138.

[22] M. E. Peskin und D. V. Schroeder: *An Introduction to Quantum Field Theory.* Advanced Book Program. Addison Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1995. ISBN 0-201-50397-2.

[23] Lewis H. Ryder: *Quantum Field Theory.* Press Syndicate of the University of Cambridge, 1991. ISBN 0-521-33859-X.

[24] S. Godfrey und M. A. Doncheski: *Signals for non-commutative QED in e gamma and gamma gamma collisions.* Phys. Rev., D65:015005, 2002. hep-ph/0108268.

[25] R. K. Ellis und W. J. Stirling: *QCD and Collider Physics.* Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, 1996. ISBN 0-521-58189-3.

[26] J. Pumplin et. al: *New generation of parton distributions with uncertainties from global QCD analysis.* JHEP, 07:012, 2002. hep-ph/0201195.

[27] E. Byckling und K. Kajantie: *Particle Kinematics.* John Wiley Sons, London, New York, Sydney, Toronto, 1973.

[28] Th. Ohl: *Electroweak gauge bosons at future electron positron colliders.* 1999. hep-ph/9911437.

[29] Th. Ohl: *Vegas revisited: Adaptive Monte Carlo integration beyond factorization.* Comput. Phys. Commun., 120:13–19, 1999. hep-ph/9806432.

[30] K. Hagiwara et. al: *Review of Particle Physics.* Phys. Rev. D, 66:010001+, 2002. http://pdg.lbl.gov.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen, welche zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, herzlich bedanken. Mein Dank gilt insbesondere:

- PD Dr. Thorsten Ohl, ohne dessen fachliche Unterstützung diese Arbeit in der vorliegenden Ausführung nicht möglich gewesen wäre und für dessen Geduld und jederzeitiger Bereitschaft zu Diskussionen ich mich noch einmal explizit bedanken möchte
- Prof. Dr. Reinhold Rückl für die Möglichkeit an seinem Lehrstuhl auf diesem interessanten Themengebiet arbeiten zu können
- Der Friedrich-Nauman-Stiftung, für deren finanzielle und ideelle Förderung innerhalb der letzten zwei Jahre
- Dem Bayerischen Staatsministerium für Wissenschaft, Forschung und Kunst für die finanzielle Unterstützung innerhalb meines ersten Studienjahres in Deutschland
- Alexander Mück, Martin Weidner und Jörg Zeiner für manches (nicht nur) fachliche Gespräch
- Alexander Wagner für die endlose Geduld bei meinen Auseinandersetzungen mit Unix, LaTeX und Root und seine freundliche Unterstützung
- Thorsten Ohl, Alexander Wagner, Markus Walther, Sebastian Weber und Jörg Zeiner für das Korrekturlesen der Diplomarbeit und die freundschaftliche Unterstützung
- Brigitte Wehner, für ihre Hilfsbereitschaft, nicht nur in Verwaltungsangelegenheiten
- Der gesamten Arbeitsgruppe der Theoretischen Physik II für die freundliche Atmosphäre

Ganz herzlich möchte ich mich ausserdem bei meinen Eltern für ihre Unterstützung in jeder Hinsicht bedanken.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Würzburg, den 27. Oktober 2003

Ana Alboteanu