Zwei-Punkt-Funktionen in $\mathcal{O}(\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{3}})$ und phänomenologische Anwendungen

Diplomarbeit
von

Thomas Schutzmeier

vorgelegt bei

Prof. Dr. R. Rückl

am
Institut für theoretische Physik und Astrophysik
der
Bayerischen Julius-Maximilians-Universität
Würzburg

19. Juli 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Standardmodell der Elementarteilchen (SM) fasst unser heutiges Verständnis von den elektroschwachen und starken Wechselwirkungen zusammen. Innerhalb der letzten Jahrzehnte konnte dieses Modell immer weiter bestätigt werden, einen großen Beitrag leisteten dabei die Beschleunigerexperimente LEP am CERN, SLC am SLAC und TEVATRON am Fermilab. Eindrucksvoll ist hierbei die erreichte Genauigkeit mit der einige Parameter des SM bestimmt werden konnten. So liegt die Unsicherheit, mit der die Masse des Z-Bosons bekannt ist, sogar unterhalb eines Promills [1]. Aktuellere Experimente an den B-Fabriken werden die noch ungenau bekannten Parameter in anderen Bereichen des SM, wie z.B. CP-Verletzung, mit höherer Präzision vermessen. Einen weiteren, bisher experimentell direkt unzugänglichen Bereich des SM stellt der Higgs-Sektor dar. Der in Kürze anlaufende Large Hadron Collider (LHC) am CERN wird mit Sicherheit einen genaueren Einblick in die Existenz des Higgs-Teilchens und seiner Kopplungen an massive Materie, aber möglicherweise auch erste Anzeichen für eine "neue Physik", eine Erweiterung des SM, bringen. Ein e^+e^--Linearbeschleuniger der nächsten Generation (NLC) würde in diesen Bereichen hochpräzise Messungen erlauben.

Aufgrund der enormen erreichbaren Genauigkeit, mit der das SM getestet werden kann, ist es sehr wichtig, ebenso präzise theoretische Vorhersagen für Observablen zu erhalten. Diskrepanzen in dem Vergleich der Berechnungen mit den präzisen experimentellen Daten ermöglichen es so, Hinweise für eine fundamentalere Theorie zu gewinnen. Eine weitere Anwendung von Hochpräzisionsberechnungen ist die genaue Berechnung von Parametern des SM, die experimentell nicht direkt zugänglich sind, wie z.B. Quarkmassen oder die indirekte Massenbestimmung des Higgs-Bosons.

Um präzise Vorhersagen für Observablen im SM machen zu können, müssen höhere Ordnungen in der Störungsreihe und somit Mehr-Schleifen-Amplituden berechnet werden. Im Mittelpunkt des Interesses stehen hierbei vor Allem Korrekturen, die von der Quantenchromodynamik (QCD), der feldtheoretischen Beschreibung der starken Wechselwirkung, herrühren. Begründet ist dies durch die Tatsache, dass die starke Kopplungskonstante α_s bei genügend hohen Energien zwar klein genug für eine Störungsentwicklung, aber im Vergleich zur elektroschwachen Kopplung noch groß ist – die QCD-Korrekturen tragen numerisch deshalb stärker bei. Eine Hierarchie in den Massen der Quarks ermöglicht zudem eine starke Vereinfachung der zugrunde liegenden Berechnungen.

Von besonderem Interesse ist in diesem Zusammenhang die Untersuchung von Zwei-Punkt-Stromkorrelatoren, aus denen sich, abhängig von der tensoriellen Struktur des involvierten Stromes, eine Vielzahl von Observablen ableiten lässt. Betrachtet man beispielsweise skalare bzw. pseudo-skalare Stromdichten, so erhält man einen Stromkorrelator der direkt mit der Observablen für den Higgs-Zerfall in Relation steht [2]. Ebenso ergibt sich der Wirkungsquerschnitt für die Hadron-Produktion in e^+e^--Annihilation über ein virtuelles Photon aus dem Vektorstromkorrelator und der Z^0-Zerfall aus einem Korrelator, den man aus einer Kombination eines Vektorstromes mit einem Axialstrom erhält.

Theoretische Vorhersagen für QCD-Korrekturen dieser Größen sind auf dem Ein- bis Drei-Schleifen-Niveau, also bis $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s^2)$, teilweise schon lange bekannt. Mit Blick auf die heutige und in absehbarer Zukunft erreichbare experimentelle Präzision ist eine Berechnung dieser Größen jedoch in noch höherer Ordnung, also auf dem Vier-Schleifen-Niveau, nötig.

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf der Diskussion des Vektorstromkorrelators in dieser Ordnung. Anhand zweier phänomenologischer Anwendungen, der Bestimmung von Quarkmassen der schweren Quarks und dem Laufen der Feinstrukturkonstante, wird die Notwendigkeit der Kenntnis dieser Größen auf dem Vier-Schleifen-Niveau zur Reduktion der Unsicherheiten demonstriert. Zu diesem Zwecke wurden umfangreiche Berechnungen unter Anwendung unterschiedlicher Methoden durchgeführt.

Im ersten Teil dieser Arbeit werden Zwei-Punkt-Stromkorrelatoren und ihre Relation zu Observablen diskutiert. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf der Hadron-Produktion über ein virtuelles Photon in e^+e^--Annihilation, deren experimentelle Bestimmung und die Interpretation der darin vorkommenden charakteristischen Strukturen ebenfalls dargestellt werden. Anschließend wird die störungstheoretische Behandlung des Vektorstromkorrelators diskutiert, bisher bekannte Ergebnisse vorgestellt und Methoden zur Berechnung von Feynmanintegralen mit mehreren Schleifen und Skalen in Form von asymptotischen Entwicklungen erläutert.

In Kapitel 3 werden mit Hilfe von Summenregeln die Massen der schweren c- und b-Quarks bestimmt. Dazu wird als neues Ergebnis zunächst das erste Moment des Vektorstromkorrelators auf dem Vier-Schleifen-Niveau bestimmt. Mit einer ausführlichen Analyse des experimentellen Wirkungsquerschnitts lässt sich aus dieser Größe über eine Dispersionsrelation die interessierende Quarkmasse extrahieren. Es zeigt sich, dass der perturbative Fehler signifikant reduziert werden kann. Im Falle der Masse des c-Quarks ergibt sich aufgrund neuer und genauerer Daten für die Quarkonia eine Verschiebung des Mittelwerts und eine Reduktion des Gesamtfehlers um die Hälfte. Aus diesem Teil der Arbeit ist eine Veröffentlichung entstanden [3].

Kapitel 4 befasst sich mit dem Laufen der Feinstrukturkonstante. Es wird gezeigt, wie man die Unsicherheit dieser Größe aus der experimentellen Ungenauigkeit über Anwendung der Adlerfunktion reduzieren und so eine Berechnung des kompletten Vektorstromkorrelators auf dem Vier-Schleifen-Niveau eine weitere Verbesserung bringen kann. Zur Berechnung dieser Zwei-Punkt-Funktion wird die Methode der Differentialgleichungen diskutiert, die es ermöglicht, eine Entwicklung für kleine äußere Impulse zu erhalten. Im Rahmen dieser Arbeit konnten so erstmals Taylorreihenentwicklungen des gesamten Vektorstromkorrelators auf dem Drei-Schleifen-Niveau und einige der auf dem Vier-Schleifen-Niveau vorkommenden Masterintegrale bis zu sehr hohen Ordnungen erhalten werden. Diese Entwicklungen werden in näherer Zukunft, zusammen mit asymptotischen Entwicklungen für große Impulse und an der Schwelle, die Konstruktion einer Näherung der gesamten Zwei-Punkt-Funktion auf dem Vier-Schleifen-Niveau ermöglichen.

Im Anhang wird die heute gängige Methode zur Reduktion des Rechenaufwands bei Berechnungen von Viel-Schleifen-Amplituden mit Hilfe von partieller Integration an einem Beispiel dargestellt. Außerdem werden die für diese Arbeit nötigen Renormierungskonstanten abgeleitet bzw. angegeben.

2 Zwei-Punkt-Funktionen und Hadron-Produktion

2.1 Vom Stromkorrelator zum Wirkungsquerschnitt

Die fundamentalen Größen bei der Untersuchung der Produktion von Hadronen in e^+e^--Annihilation sind der experimentell über einen weiten Energiebereich zugängliche inklusive Wirkungsquerschnitt und die sog. Stromkorrelatoren auf theoretischer Seite. Von sehr großem physikalischen Interesse ist die Relation zwischen diesen beiden Größen, mit deren Kenntnis die grundlegenden Parameter der QCD mit sehr hoher Präzision bestimmt werden können.
In seiner allgemeinen Form ist der hier interessierende Stromkorrelator gegeben durch die Zwei-Punkt-Funktion

$$\begin{aligned}\Pi^j_{\mu\nu}(p^2) &= (-p^2\,g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu)\,\Pi^j_T(p^2) - p_\mu p_\nu\,\Pi^j_L(p^2) \\ &= i\int dx\, e^{ipx}\langle 0|T j^a_{\Gamma,\mu}(x) j^b_{\Gamma,\nu}(0)|0\rangle, \end{aligned} \tag{2.1}$$

die die QCD-Dynamik für die Produktion von Quarks über einen äußeren Strom $j^i_{\Gamma,\mu} = \overline{q}_i \Gamma_\mu q_i$ des Flavours i enthält. p ist der äußere Impuls und $\Pi^j_{T/L}(p^2)$ sind skalare Funktionen, die dem Transversal- bzw. Longitudinalteil des Korrelators entsprechen. Im Folgenden wird nur der Transversalteil betrachtet und $\Pi^j(p^2) = \Pi^j_T(p^2)$ gesetzt. Nachfolgende Betrachtungen gelten separat auch für den Longitudinalteil.
Unabhängig von der Art des Stromes lassen sich anhand der Källen-Lehmann-Darstellung Aussagen über die Analytizität des Stromkorrelators treffen. So ist $\Pi^j(p^2)$ analytisch in der komplexen Ebene unterhalb der Schwelle $p^2 = 4M_\pi^2$ für die Produktion von Pionen, den leichtesten Hadronen der Masse M_π. Oberhalb dieses Punktes besitzt die Funktion auf der reellen Achse einen Schnitt, sodass

$$\Delta\Pi^j(p^2) = \Pi^j(p^2 + i\epsilon) - \Pi^j(p^2 - i\epsilon) = 2i\mathrm{Im}\Pi^j(p^2) \neq 0, \tag{2.2}$$

wobei $\Delta\Pi^j(p^2)$ auch als Absorbtivteil bezeichnet wird.
Mit Hilfe des Cauchy-Theorems lässt sich eine Dispersionsrelation gewinnen, die die Funktion an einem beliebigen Punkt der komplexen Ebene mit dem Schnitt an der reellen Achse verknüpft:

$$\Pi^j(p^2) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C ds\,\frac{\Pi^j(s)}{s-p^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{s_0}^\infty ds\,\frac{\Delta\Pi^j(s)}{s-p^2} = \frac{1}{\pi}\int_{s_0}^\infty ds\,\frac{\mathrm{Im}\Pi^j(s)}{s-p^2}. \tag{2.3}$$

Der Integrationsweg C ist in Abb. 2.1 wider gegeben. Es wird angenommen, dass $\Pi^j(s)$ für große s genügend schnell abfällt, sodass die Integration über den Kreis für $s \to \infty$ verschwindet. Sofern $\Pi^j(s)$ im Unendlichen nicht verschwindet, sondern sich in diesem Grenzwert wie s^n $(n \geq 0)$ verhält, betrachtet man stattdessen eine n-fach subtrahierte Dispersionsrelation

$$\Pi^j(p^2) = \frac{1}{\pi}\int_{s_0}^\infty ds\,\frac{(p^2)^n\mathrm{Im}\Pi^j(s)}{s^n(s-p^2)} + \sum_{k=0}^n a_k (p^2)^k \tag{2.4}$$

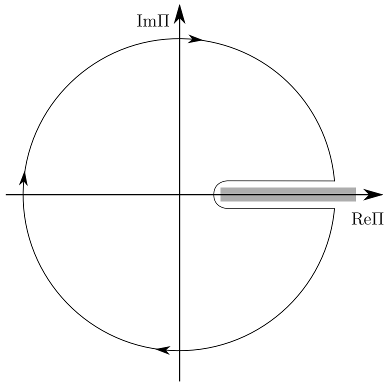


Abbildung 2.1: Integrationsweg für die Ableitung der Dispersionsrelation

mit unbekannten Subtraktionen $a_k(p^2)^k$, die sich mit n-maliger Differentiation beseitigen lassen. Der absorbtive Teil wird von diesen Subtraktionen nicht beeinflusst.
Von besonderem Interesse für die Hadron-Produktion in $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$-Annihilation sind die Vektor- und Axialvektor-Ströme

$$j^V_\mu = \sum_f v_f \overline{q}_f \gamma_\mu q_f \quad \text{und} \quad j^A_\mu = \sum_f a_f \overline{q}_f \gamma_\mu \gamma_5 q, \tag{2.5}$$

mit den Kopplungen v_f und a_f an die unterschiedlichen Quark-Flavours f. Der Korrelator, der sich aus dem Vektorstrom ergibt, entspricht der Vakuumpolarisation des Photons, während eine Kombination aus Axial- und Vektorstrom die Vakuumpolarisation des Z^0-Bosons beschreibt.
Im Folgenden wird nur der Vektorstromkorrelator für den elektromagnetischen Strom betrachtet, da die Produktion von Quarks aus einem Z^0-Zerfall zum Gesamtwirkungsquerschnitt einen Beitrag $\mathcal{O}(s/M_Z^2)$ liefert, der in dem interessierenden Energiebereich $s \ll M_Z^2$ vernachlässigbar ist.
Die Photon-Vakuumpolarisation schreibt sich unter Berücksichtigung der Transversalität, die sich aus der Eichinvarianz ergibt, als

$$\Pi^V_{\mu\nu}(p^2) = (-p^2 g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu)\Pi^V(p^2) = i \int dx e^{ipx} \langle 0|T j^V_\mu(x) j^V_\nu(0)|0\rangle. \tag{2.6}$$

$\Pi^V(p^2)$ erfüllt eine einfach subtrahierte Dispersionsrelation [4]:

$$\Pi^j(p^2) = \frac{1}{\pi}\int_{s_0}^\infty ds \frac{p^2 \mathrm{Im}\Pi^V(s)}{s(s-p^2)} + \Pi^V(0). \tag{2.7}$$

Mit Hilfe des optischen Theorems lässt sich nun eine Verbindung zwischen dem Absorbtivteil der Vakuumpolarisation und dem inklusiven Wirkungsquerschnitt $R(s)$ für Hadron-Produktion herstellen, der üblicherweise auf den Prozess $\sigma(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \mu^+\mu^-)$ auf dem Baumniveau normiert wird,

$$R(s) = \frac{\sigma(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \text{Hadronen})}{\sigma(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \mu^+\mu^-)}. \tag{2.8}$$

Dabei ist $\sigma(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \mu^+\mu^-) = 4\pi\alpha^2/3s$ im Limit $m_e, m_\mu \to 0$ [5], $\sqrt{s}$ die Schwerpunktsenergie im $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$-System und schließlich ergibt sich

$$R(s) = 12\pi \mathrm{Im}\Pi^V(s). \tag{2.9}$$

Dies ist das zentrale Ergebnis dieses Kapitels. Aus (2.8) ist ersichtlich, dass $R(s)$ unabhängig von der Feinstrukturkonstante α ist und somit der in $\Pi^V(p^2)$ beitragende Strom von der Form $j_\mu^V = iQ_q\overline{q}\gamma_\mu q$, also ebenfalls unabhängig von der Elementarladung, sein muss.
Relation (2.9) impliziert in der QCD eine Dualität zwischen der Produktion von Hadronen, die nicht als fundamentale Teilchen in der Theorie auftreten, und der Erzeugung von Partonen. Gerechtfertigt wird diese Annahme durch die Tatsache, dass die Erzeugung eines Quark-Antiquark-Paares bei hohen Energien aus einem Photon mit der Virtualität q auf einer Zeitskala von $1/q$ stattfindet, die Hadronisierung aber auf der viel größeren Skala $1/\Lambda_{QCD}$ abläuft. Die Wahrscheinlichkeit, mit der ein bestimmtes Ereignis auf dem Parton-Niveau stattfindet, wird somit durch den Vorgang der Hadronisierung nicht modifiziert und der Gesamtwirkungsquerschnitt für Parton-Produktion ist deshalb identisch zu dem der Erzeugung von Hadronen mit dem entsprechenden Parton-Inhalt. Eine Kenntnis des genauen Hadronisierungs-Mechanismus ist somit nicht erforderlich. Eine formalere Beschreibung dieser Dualität und der daraus entstehenden Komplikationen wird in Kap. 2.4 gegeben. Sämtliche bisherigen Betrachtungen kommen ohne die Einführung einer perturbativen Entwicklung aus und somit sind bis jetzt sämtliche nicht-perturbativen Effekte im Korrelator enthalten.

2.2 Experimentelle Bestimmung

Grundlagen

Die Hadron-Produktion in e^+-e^--Annihilation bildet eine der wichtigsten experimentellen Zugänge zu der Physik der QCD. Grundlage hierfür ist neben der hohen erreichbaren Schwerpunktsenergie ein sauberer Anfangszustand und die exzellente Kenntnis der leptonischen Wechselwirkung.

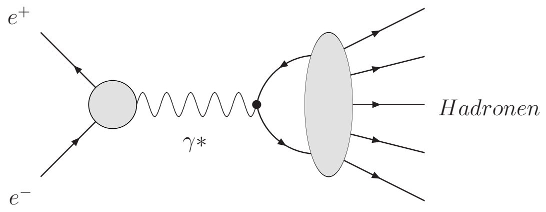


Abbildung 2.2: Der Prozess e^+-e^- $\rightarrow$ Hadronen

So ist klar, dass der Prozess bei niedrigen Energien durch Austausch eines virtuellen Photons, bei Energien höher als die Z^0-Masse durch eine Mischung aus Photon- und Z^0-Austausch dominiert wird (siehe Abb. 2.2). Dadurch ergibt sich, dass der hadronische Endzustand bei reinem Photonaustausch insgesamt die Quantenzahlen des Photons besitzt ($J^{PC} = 1^{--}$), was die experimentelle Analyse deutlich vereinfacht. Bei Beimischung des Z^0-Austausches ist lediglich die Parität nicht mehr erhalten und der Endzustand besitzt nach wie vor $J = 1$. Aufgrund der geringen Masse von Elektron und Positron ist der Austausch über ein Higgs-Boson stark unterdrückt und wird nicht berücksichtigt.
Ein weiterer Vorteil ergibt sich aus der Verwendung von punktförmigen Teilchen im Anfangszustand, sodass eine Verschmierung von schmalen Strukturen im Wirkungsquerschnitt nicht auftritt und Resonanzen mit kleiner Zerfallsbreite mit sehr hoher Präzision vermessen werden können.

Experimentell ergibt sich $R(s)$ aus der Messung aller Ereignisse im Wirkungsquerschnitt $\sigma(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to$ "Alles") unterhalb von ca. 20 GeV aus der Relation

$$R(s) = \delta\, \frac{\sigma(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \text{“Alles”}) - \sigma(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to l^+l^-) - \sigma(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \gamma\gamma)}{\sigma(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \mu^+\mu^-)}. \tag{2.10}$$

$\sigma(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to l^+l^-)$ entspricht hierbei mit $l = e, \mu, \tau$ der Bhabha-Streuung zusammen mit der Produktion von Lepton-Paaren, $\sigma(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \gamma\gamma)$ resultiert aus Zwei-Photon-Annihilation und δ beseitigt die Abstrahlung von Photonen aus dem Anfangszustand (*initial state radiation*). Nicht aufgeführt sind weitere Subtraktionen, die aufgrund von Hintergrundeffekten und Detektorcharakteristika nötig werden und von dem jeweiligen experimentellen Aufbau abhängen.

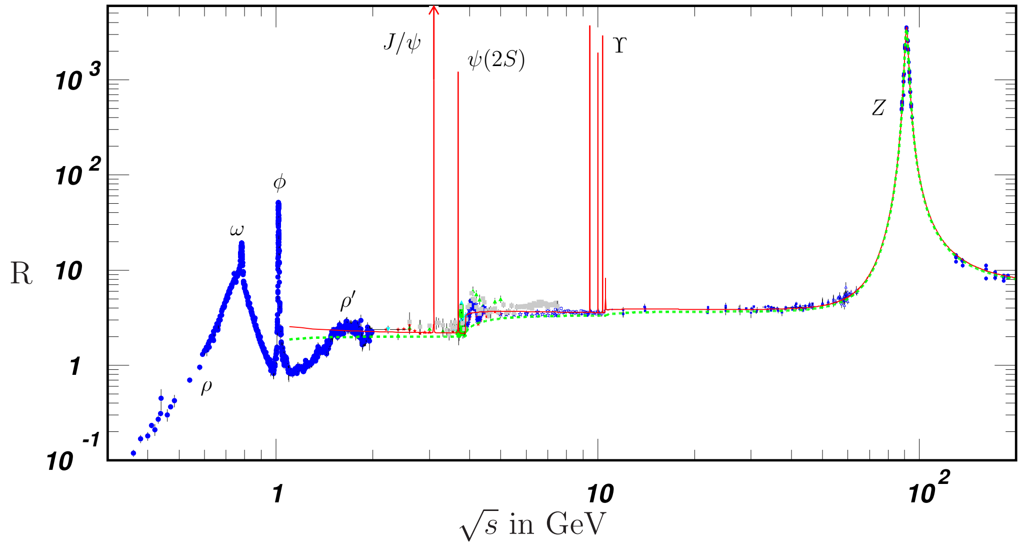


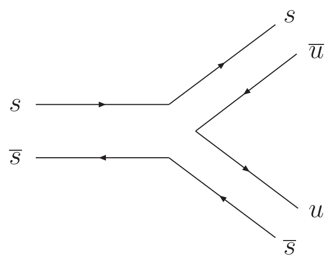
Abbildung 2.3: Plot von $R(s)$ aus einer Zusammenstellung von von verschiedenen Experimenten [1]

Diskussion der kinematischen Bereiche

Abb. 2.3 zeigt einen Plot von $R(s)$ aus den aktuellen verfügbaren experimentellen Daten. Hierbei handelt es sich um eine Zusammenstellung aus einer Vielzahl von Experimenten, die sich über unterschiedliche Energiebereiche erstrecken und auf verschiedenen Technologien basieren (eine Übersicht findet sich in [6]). Beachtenswert ist die Anzahl sich unterscheidender Strukturen im Spektrum, deren Ursprünge im Laufe der letzten Jahrzehnte geklärt wurden und so einen entscheidenden Beitrag zum Verständnis der starken Wechselwirkung beigetragen haben.

Der generelle Verlauf von $R(s)$ entspricht einem stufenförmigen Ansteigen mit Oszillationen an den Sprungstellen und einer Durchsetzung mit ausgeprägten Maxima. Im Folgenden sollen diese Strukturen im Wirkungsquerschnitt beleuchtet werden.
Die Daten im Spektrum von Abb. 2.3 starten bei einer Schwerpunktsenergie von ca. 360 MeV, oberhalb der Schwelle für die Produktion der mit einer Masse von ca. 140 MeV leichtesten Mesonen, den Pionen π^0, π^+ und π^-. Pionen finden sich also bei jeder Energie im hadronischen Endzustand wieder.
Unterhalb von 2.0 GeV finden sich im Spektrum ausgeprägte Maxima, die als Resonanzen mit einer festen Masse, definierten Quantenzahlen und einer endlichen Lebensdauer, die sich aus der

Breite des Maximums ergibt, interpretiert werden. Diese Zustände besitzen Zerfallsbreiten im Bereich von ca. 4 MeV und 150 MeV, was typisch für den Zerfall über die starke Wechselwirkung ist. Daraus und aus den Quantenzahlen des ausgetauschten virtuellen Photons folgert man, dass es sich um Vektormesonen handelt, die in leichtere Mesonen zerfallen.
Tatsächlich findet man aus exklusiven Messungen, dass das Maximum um 780 MeV zwei Zerfallskanäle in Pionen besitzt und somit eine Interferenz aus zwei Resonanzen darstellt, die man als $\rho(770)$ und $\omega(782)$ bezeichnet. Diese Mesonen befinden sich somit in einem Mischzustand aus $|u\overline{u}\rangle$ und $|d\overline{d}\rangle$.
Das dritte Maximum im Spektrum wird einer weiteren Resonanz, dem $\phi(1020)$-Meson, zugeschrieben, die mit einer Breite von 4.3 MeV eine für Hadronen recht lange Lebensdauer hat. Der Zerfall des ϕ, das einem $s\overline{s}$-Zustand entspricht, geschieht bevorzugt in Kaonen, das sind Mesonen aus up-/down-Quarks in Verbindung mit einem strange-Quark und einer Gesamtmasse von ca. 500 MeV. Die lange Lebensdauer erklärt sich aus diesem Prozess durch die geringe Massendifferenz zwischen Anfangs- und Endzustand und dem daraus resultierenden kleinen Phasenraum. Ein Zerfall in leichtere Mesonen ist zudem stark unterdrückt, da die Annihilation eines $s\overline{s}$-Paares nur über einen Zwischenzustand von drei Gluonen stattfinden kann. Qualitativ wird dies aus dem Postulat von IIzuka [7], Okubo [8] und Zweig [9] klar, wonach Prozesse mit unterbrochenen Quark-Linien im Vergleich zu Prozessen mit ununterbrochenen Linien unterdrückt sind.
Im Rahmen der QCD kann diese “Zweig-Regel” plausibel gemacht werden. Zum Einen ist die Farbladung erhalten, sodass eine Vernichtung des Quark-Antiquark-Paares in ein einziges Gluon verboten ist. Zum Anderen ist der Austausch zweier Gluonen durch das Landau-Yang-Theorem verboten, da das ϕ ein Vektormeson und deshalb in einem Colour-Singlet-Zustand ist und der Singlet-Zustand von zwei Gluonen symmetrisch bezüglich Vertauschung ist. Allerdings ist zu beachten, dass aufgrund der Größe der Kopplungskonstante im Bereich der Resonanzen aus leichten Quarks nicht gewährleistet ist, ob eine Störungsentwicklung überhaupt Sinn macht. Die soeben dargelegte Argumentation gilt streng also nur für den Fall großer beteiligter Energieskalen.



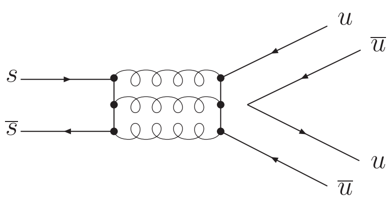


Abbildung 2.4: Nach der Zweig-Regel bevorzugte (a) und unterdrückte Prozesse (b).

Eine weitere Struktur im Wirkungsquerschnitt befindet sich unterhalb von 2 GeV. Sie ist relativ breit und beherbergt verschiedene kurzlebige Anregungen der erwähnten Mesonen und wird hier nicht weiter diskutiert.
Der hohe Wirkungsquerschnitt der oben beschriebenen Prozesse macht diese zu sehr interessanten Kandidaten für verschiedene Anwendungen. Bereits gegen Mitte der 1970er Jahre wurde so der Pionen-Formfaktor mit einer hohen Genauigkeit aus dem Zerfall des ρ-Mesons ermittelt [10] und der Fehler in einem kontinuierlichen Fortschritt in der Entwicklung von Detektoren und ausgefeilteren Auswertungsmethoden bis heute reduziert [11].

In den Intervallen 2.0 - 3.7 GeV, 4.8 - 10.5 GeV und 11.2 - 20 GeV, die auch als Kontinua bezeichnet werden, ist $R(s)$ annähernd konstant sofern man zunächst die sehr schmalen Resonanzen ignoriert. Der hadronische Wirkungsquerschnitt ist in diesen Bereichen also direkt proportional zur Myon-Produktion und die Dynamik wird von strukturlosen Teilchen dominiert. Dies entspricht dem bereits erwähnten Bild der Erzeugung eines Parton-Schauers im Primärprozess, der auf einer größeren Zeitskala über Anlagerung von Quark-Antiquark-Paaren aus dem Vakuum hadronisiert. Die erzeugten Hadronen können dabei nur aus Quarks bestehen, deren Masse kleiner als die halbe zur Verfügung stehende Schwerpunktsenergie ist. So werden zwischen 2.0 GeV und 3.7 GeV Hadronen produziert, die nur aus up-, down- und strange-Quarks bestehen. Im zweiten Intervall reicht die Schwerpunktsenergie bereits aus, um $c\overline{c}$-Paare zu erzeugen und der Wirkungsquerschnitt steigt aufgrund der größeren Zahl an Partonen sprunghaft an. Der dritte kleinere Sprung oberhalb von ca. 11 GeV basiert auf der zusätzlichen Erzeugung von $b\overline{b}$-Paaren. Experimentell werden die im Kontinuum auftretenden Ereignisse als eine Anzahl von Jets, abhängig von der Anzahl und Winkelverteilung der im Primärprozess produzierten Partonen, registriert.
Aus der Kenntnis des Wirkungsquerschnitts in der Kontinuum-Region konnten grundlegende Eigenschaften des Colour-Sektors der QCD geklärt und bestätigt werden. So ließ sich der Verlauf von $R(s)$ bereits auf Baumniveau mit der Annahme einer $SU_C(3)$-Symmetrie in Einklang bringen. Ebenso wurde aus der Beobachtung von Drei-Jet-Ereignissen neben den Erkenntnissen aus tiefinelastischer Leptonenstreuung an Protonen [12] ein weiterer Hinweis auf die Existenz des Gluons gefunden und aus diesen Daten die asymptotische Freiheit der QCD nachgewiesen.

Eine besondere Rolle in der Geschichte der Hadron-Physik spielen die im Bereich unterhalb der Schwellen für charm- und bottom-Erzeugung sichtbaren sehr schmalen Resonanzen. Unabhängig voneinander fanden zwei Gruppen [13, 14] gegen Ende des Jahres 1974 den ersten dieser bis dahin unbekannten Zustände bei einer Schwerpunktsenergie von 3097 MeV. Diese als J/Ψ bezeichnete Resonanz besitzt mit einer Breite von nur 91 keV eine für hadronische Zustände extrem lange Lebensdauer. Innerhalb der nachfolgenden Jahre wurden unzählige weitere solcher "neuen" Resonanzen gefunden, mitunter die in $R(s)$ erkennbaren $\Psi(n)$ und $\Upsilon(n)$.
Relativ bald nach ihrer Entdeckung wurde klar, dass es sich bei diesen Zuständen um gebundene $q\overline{q}$-Zustände aus schweren c- bzw. b-Quarks handelt, die in Analogie zum Positronium als Quarkonium bezeichnet werden. So handelt es sich bei J/Ψ um den energetisch günstigsten Bindungszustand, während $\Psi(n)$ der n-ten Anregung des $c\overline{c}$ entspricht. Entsprechend werden die $b\overline{b}$-Zustände als $\Upsilon(n)$ bezeichnet.
Die kleine Zerfallsbreite im Beispiel des J/Ψ erklärt sich nun mit Hilfe der Zweig-Regel: der bevorzugte Zerfall sollte in D-Mesonen aus einem leichten und einem c-Quark stattfinden, der Zerfall in leichtere Mesonen über $c\overline{c}$-Annihilation ist aufgrund der kleinen Kopplung $\alpha_s(m_c^2)$, mit der charm-Masse m_c als dominierende Energieskala, stark unterdrückt. Allerdings hat das leichteste Meson mit Quarkinhalt $c\overline{q}$ ($m_q \ll m_c$), das D^0, eine Masse von ca. 1860 MeV. Die Masse des J/Ψ liegt deshalb unterhalb der Schwelle für die Produktion von $D^0\overline{D}^0$ und somit *muss* der hadronische Zerfall über eine $c\overline{c}$-Annihilation stattfinden.
Quarkonia und deren Eigenschaften haben auch große Beachtung auf theoretischer Seite erfahren. So lassen sich mit Hilfe nichtrelativistischer Modelle (NRQCD) und anderer Ansätze gute Vorhersagen für das Spektrum der Quarkonium-Anregungen finden [15], wodurch sie eine Quelle zur Ermittlung der freien Parameter der QCD, Quarkmassen und α_s, bieten (siehe Kapitel 3).

Im Bereich von 3.7 - 4.8 GeV und 10.5 - 11.2 GeV befinden sich die sog. Schwellenregionen für die Produktion von c- bzw. b-Quarks aus der e^+e^--Annihilation.
Die charm-Schwellenregion ist durchzogen mit höheren Anregungen der J/Ψ-Resonanz, die nun aber aufgrund der höheren Massen mit großer Wahrscheinlichkeit in leichte Mesonen zerfallen können und somit kurze Lebensdauern haben. Am oberen Ende dieser Schwellenregion geht das

Verhalten in das Kontinuum mit vier aktiven Flavours über.
Mit $\Upsilon(10580)$ setzt bei ca. 10.5 GeV die Produktion von Mesonen mit b-Quark-Inhalt ein, ab ca. 10.6 GeV oszilliert der Wirkungsquerschnitt mit kleiner Amplitude und mündet schließlich bei ca. 11.2 GeV in das Kontinuum-Verhalten mit fünf aktiven Flavours.

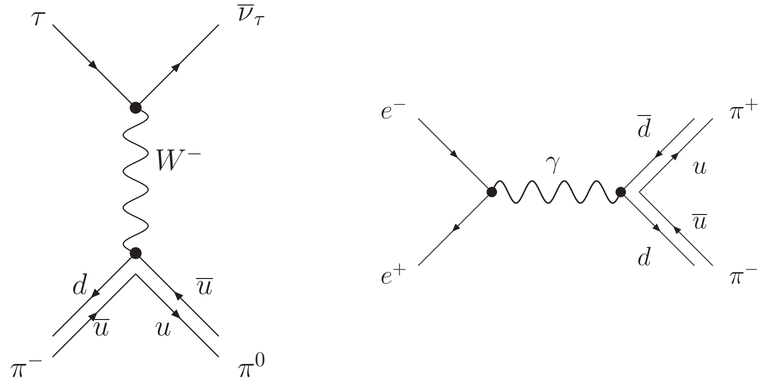
Am oberen Ende des Energiebereichs in Abb. 2.3, bei ca. 91 GeV, findet man schließlich die Z^0-Resonanz, die aber hier nicht weiter diskutiert werden soll.

Experimentelle Techniken

Selbstverständlich findet der Großteil der Experimente zur Bestimmung des hadronischen Wirkungsquerschnitts an Elektron-Positron-Beschleunigern statt. Aufgrund des riesigen zu überdeckenden Energiebereichs und der unterschiedlichen Endzustände müssen dabei viele verschiedene Experimente, mit an die Bedingungen angepassten Detektoren und Auswertemethoden, durchgeführt und kombiniert werden.
So wurden die Daten in 2.3 im Niedrigenergiebereich bis 2 GeV aus einer Kombination von Messungen exklusiver Wirkungsquerschnitte der leichten Mesonen gewonnen. Daran beteiligt waren mehrere Gruppen seit Anfang der 70er Jahre und eine Vielzahl von Verbesserungen in der Detektion und Auswertung der Daten war nötig, um eine Genauigkeit von nun ca. 1 % in dieser Energieregion zu erhalten [11]. Oberhalb von 2 GeV bis hin zu 5 GeV wurde der Wirkungsquerschnitt am Beijing Electron-Positron-Collider mit einem durchschnittlichen systematischen Fehler von nur 6.6 % vermessen [16]. Die Auflösung des eingesetzten Detektors war im gesamten Spektralbereich groß genug, um die einzelnen Resonanzen in der charm-Schwellenregion im Vergleich mit anderen Experimenten in dieser Region gut zu erfassen.
Alternativ zur Variation der Schwerpunktsenergie über einen weiten Bereich, was einen größeren systematischen Fehler mit sich bringt, bietet es sich an, den Collider in nur einem engen aber sehr genau festgelegten Energiebereich zu betreiben. Beispielsweise wird die Maschine DAΦNE exakt auf der ϕ-Resonanz betrieben [17] und am PEP-II wird die Erzeugung von B-Mesonen bei einer Energie von 10.6 GeV untersucht [18]. Dank der Methode des sog. Photon-Taggings [19], lassen sich auch aus diesen Messungen Informationen über einen gewissen Schwerpunktsenergiebereich gewinnen ohne die Strahlenergie zu variieren. Man nutzt hierbei die Detektion eines vom Anfangszustand abgestrahlten Photons aus, dessen Energie direkte Rückschlüsse auf die Energie der detektierten Hadronen erlaubt. Mit Hilfe dieser Technik konnte z.B. die Zerfallsbreite des J/Ψ [20] und der Resonanzbereich des ρ genau vermessen werden [21].
Eine weitere Quelle zur Bestimmung von $\sigma(e^+e^- \to \text{Hadronen})$, speziell des Prozesses $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$, ergibt sich aus der Kenntnis der Spektralfunktion v_τ des τ-Zerfalls $\tau \to \pi^-\pi^0\overline{\nu}_\tau$. Ebenso wie der Wirkungsquerschnitt der Hadron-Produktion mit einem Vektorstrom-Korrelator in Beziehung steht, lässt sich der Zerfall des τ-Leptons aus dem Isovektorstrom-Korrelator erhalten [22]. Unter der Annahme dass $SU_F(2)$ eine gute Symmetrie im leichten Hadron-Sektor ist, lassen sich diese Korrelatoren über eine Isospin-Rotation in Verbindung setzen und man erhält [23]

$$\sigma(e^+e^- \to \pi^+\pi^-) = 4\pi\alpha^2 \frac{v_\tau}{s}. \tag{2.11}$$

Diese Relation lässt sich auch hervorragend zur Ermittlung des hadronischen Anteils des anomalen magnetischen Moments des Myons nutzen, der stark vom Wirkungsquerschnitt bei niedrigen Energien abhängt [24]. Allerdings ist der Isospin auf dem Niveau der heute im Experiment erreichten Genauigkeit keine gute Symmetrie und es müssen Isospinsymmetrie-Verletzungen in (2.11) berücksichtigt werden [25]. Vergleiche zwischen den Ergebnissen aus τ-Zerfällen mit den oben erwähnten Messungen des hadronischen Wirkungsquerschnitts zeigen Diskrepanzen auf dem 10 %-Niveau [26], was vermutlich auf die noch unzureichende Kenntnis der symmetriebrechenden Effekte zurückzuführen ist [27].



(a) (b)

Abbildung 2.5: τ-Zerfall (a) und $\pi^+\pi^-$-Produktion in e^+e^--Annihilation (b). Die hadronischen Endzustände sind über eine Isospin-Rotation miteinander verknüpft.

2.3 Perturbative Näherung in der QCD

Im Mittelpunkt des Interesses dieser Arbeit steht der Vektorstromkorrelator mit dem Strom $j_\mu^h = \overline{\psi}_h\gamma_\mu\psi_h$, der ein schweres Quarkfeld ψ_h der Masse m enthält. Im Grenzwert kleiner Abstände $x \to 0$, der auf der einen Seite dem Fall eines großen externen Impulses und auf der anderen Seite dem Fall einer Propagation von schweren virtuellen Teilchen mit Masse M und einem vernachlässigbarem äußeren Impuls $p^2 \ll M$ entspricht, kann man auf den Vektorstromkorrelator (2.6) in der QCD die sog. Entwicklung von Operator-Produkten (*operator product expansion, OPE*) anwenden (unter Berücksichtigung der Fouriertransformation in den Impulsraum):

$$\Pi_{\mu\nu}^h(p^2) = i\int dx e^{ipx}\langle 0|Tj_\mu^h(x)j_\nu^h(0)|0\rangle = \tag{2.12}$$
$$= (-p^2 g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu)\times\begin{cases} C_{\mathbb{1}}^p(p^2,\mu) & + \quad \sum_i C_i^p(p^2,\mu)\langle 0|O_i(\mu)|0\rangle \quad \text{für} \quad p^2\to\infty \\ C_{\mathbb{1}}^M(M^2,p^2,\mu) & + \quad \sum_i C_i^M(M^2,p^2,\mu)\langle 0|O_i(\mu)|0\rangle \quad \text{für} \quad M^2\to\infty, \end{cases}$$

mit den Wilson-Koeffizienten C_i^k und den aus Quark- und Gluonfeldern zusammengesetzten und lokal eichinvarianten Operatoren O_i. In dieser Arbeit wird für eine Abschätzung der nicht-perturbativen Effekte die Entwicklung für große Massen benötigt, da eine Taylorreihenentwicklung der Vakuumpolarisation um $p^2 = 0$ durchgeführt wird. Eine Untersuchung der Wilson-Koeffizienten mit Hilfe der Renormierungsgruppe zeigt, dass die $C_i^p(S^2,\mu)$ bzw. $C_i^M(S^2,p^2,\mu)$ mit $1/(S^2)^{d_i}$ in der Skala S gedämpft sind, wobei d_i sich aus den Dimensionen der äußeren Ströme und den Operatoren O_i ergibt. Bei großen Skalen dominieren also Beiträge von Operatoren mit kleinen Dimensionalitäten:

$$\begin{aligned} d=0: &\quad \mathbb{1}, \\ d=3: &\quad O_{\overline{q}q} \quad = \quad \overline{q}q, \\ d=4: &\quad O_{G^2} \quad = \quad G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a. \end{aligned} \tag{2.13}$$

In der Störungstheorie verschwinden die Erwartungswerte $\langle 0|O_i|0\rangle$ per Definition, allerdings ändern nicht-perturbative Effekte in der QCD die Eigenschaften des Vakuums und erzeugen

so nicht-verschwindende Vakuumerwartungswerte obiger Operatoren. In [28] konnte gezeigt werden, dass der Vakuumerwartungswert von $O_{\overline{q}q}$ mit Hilfe von Ward-Identitäten vollständig in dem Gluon-Kondensat $\langle 0|G^a_{\mu\nu}G^a_{\mu\nu}|0\rangle$ absorbiert werden kann.
Langreichweitige Effekte werden somit von Matrixelementen der Operatoren O_i beschrieben, während das kurzreichweitige Verhalten durch die perturbativ zugänglichen Wilson-Koeffizienten beschrieben wird. Tatsächlich entspricht der Koeffizient $C_{\mathbb{1}}(p^2)$ den üblichen störungstheoretischen Beiträgen zur Vakuumpolarisation $\Pi^h_{\mu\nu}(p^2)$, die von nun an mit $\Pi^h(p^2)$ bezeichnet werden.

Perturbative Näherung

Perturbativ wird die Photon-Vakuumpolarisation als eine Reihe in $a = \alpha_s/\pi$ dargestellt:

$$\Pi^h(p^2) = \Pi^{(0)}(p^2) + a\Pi^{(1)}(p^2) + a^2\Pi^{(2)}(p^2) + a^3\Pi^{(3)}(p^2) + \ldots \tag{2.14}$$

$\Pi^{(0)}(p^2)$ entspricht dabei den Ein-Schleifen-Korrekturen zur Polarisationsfunktion des Photons und die $\Pi^{(i)}(p^2)$ mit $i > 0$ enthalten die höheren QCD-Korrekturen. Abb. 2.6 zeigt beispielhaft Diagramme die bis zu $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ beitragen. Die Anzahl der beitragenden Diagramme steigt mit zunehmender Ordnung exponentiell an, auf dem Vier-Schleifen-Niveau existieren bereits 665 Diagramme.

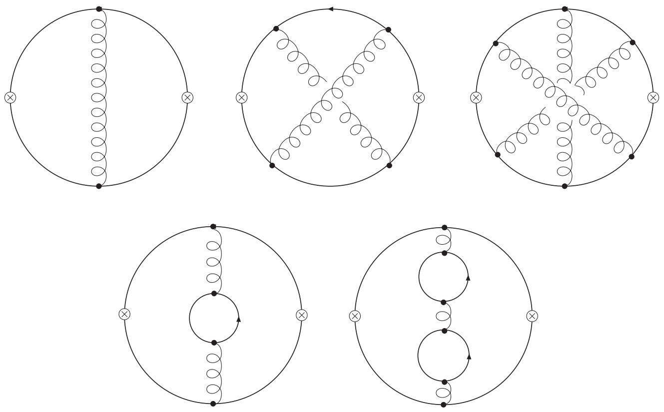


Abbildung 2.6: Beispiele für Zwei- bis Vier-Schleifen-Diagramme, die zur Berechnung von $\Pi(q^2)$ bis $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ benötigt werden.

Durch die Ankopplung des externen Photons an ein massives Quark ergeben sich im wesentlichen zwei Typen von Feynmandiagrammen:

- Diagramme mit einer geschlossenen massiven äußeren Schleife und
- Diagramme, die zwei oder mehr geschlossene massive Schleifen, nur verbunden durch gluonische Linien, besitzen.

Diagramme der zweiten Art werden aufgrund der Colour-Struktur in der QCD als Singlets bezeichnet. Dank Furrys Theorem verschwinden im Falle des hier untersuchten Vektorstromes alle Singlet-Diagramme, deren Fermion-Schleifen eine ungerade Anzahl von Vertizes haben. Die ersten beitragenden Singlets finden sich also erst auf dem Vier-Schleifen-Niveau (siehe Abb. 2.7).

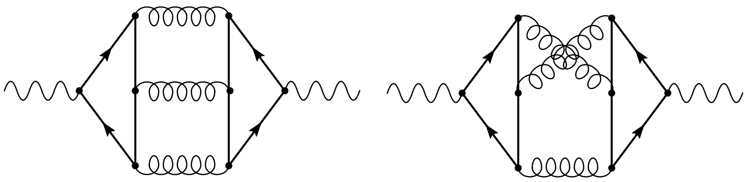


Abbildung 2.7: Singlet-Diagramme in $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$

Diese Singlets besitzen im Vergleich zu den anderen auftauchenden Diagrammen einen Schnitt, der nur durch gluonische Linien geht. Dies hat zur Folge, dass der Imaginärteil dieser Graphen zusätzlich zu den Divergenzen bei den unterschiedlichen Schwellen zur Quarkproduktion auch noch eine Divergenz bei verschwindendem äußeren Impuls besitzt. Im Hinblick auf die experimentelle Genauigkeit und den in den nächsten Kapiteln durchgeführten Analysen müssen diese Beiträge getrennt untersucht und bewertet werden (siehe Kap. 2.4).
Die Berechnung von $\Pi^h(p^2)$ in dimensionaler Regularisierung bis zu einer gewissen Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^k)$ liefert aufgrund der Schleifenintegrale noch kein endliches Ergebnis, sondern besitzt Pole der Form $\epsilon^{-i} = (1/2(4-D))^{-i}$ mit $i \leq k$. Zur Eliminierung dieser Pole führt man eine multiplikative Renormierung von $\Pi^h(q^2)$ im $\overline{\text{MS}}$-Schema durch. Der große Vorteil dieses Schemas liegt in der relativ einfachen Ermittlung und Lösung von Renormierungsgruppen(RG)-Gleichungen. Außerdem handelt es sich um ein massenunabhängiges Schema, wodurch die Anwendung der RG-Funktionen transparent wird.
Die renormierte Vakuumpolarisation $\Pi_R^h(p^2)$ erhält man mit den nackten Parametern m^0 und α_s^0 aus

$$Z_\Pi^{-1}\Pi_B^h(m^0, \alpha_s^0, p^2) = \Pi_R^h(m, \alpha_s, p^2) = \Pi^h(m, \alpha_s, p^2) - \Pi^h(m, \alpha_s, 0) \tag{2.15}$$

mit der renormierten Kopplung und Masse in $D = 4 - 2\epsilon$ Dimensionen

$$\alpha_s^0 = \mu^{2\epsilon} Z_\alpha \alpha_s, \quad m^0 = Z_m m. \tag{2.16}$$

Die Renormierungskonstanten haben im Allgemeinen die Form

$$Z = 1 + \sum_{i,j}^{0<i\leq j} Z_{ij} a^i \frac{1}{\epsilon^j}. \tag{2.17}$$

Ihre Ermittlung aus den anomalen Dimensionen γ_m und β sowie die Konstante $\Pi^h(m, \alpha_s, 0)$ sind im Anhang B angegeben.
Bereits 1955 wurde die Polarisationsfunktion $\Pi_{\mu\nu}^h(p^2)$ bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s)$ im Rahmen der QED berechnet [29]. In dieser Ordnung ist es noch möglich, analytische Ergebnisse mit Hilfe von Integraldarstellungen anzugeben. In [30, 31] wurden diese Darstellungen mit Linearkombinationen von Polylogarithmen $\mathrm{Li_k(x)}$ identifiziert. Bis zum Zwei-Schleifen-Niveau schreibt sich das Ergebnis aus [30] mit der On-Shell-Masse m als:

$$\Pi^{(0)}(x) = \frac{3}{16\pi^2}\left(\frac{5}{9} + \frac{4}{3x} - \frac{(4-x)(2+x)}{6x}G(x)\right), \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}\Pi^{(1)}(x) &= \frac{3}{16\pi^2}\left(\frac{40}{3} + \frac{416}{3x} - \frac{8(4-x)(6+x)}{x}G(x) + \frac{x(4-x)(1/4-x)}{3x}G^2(x)\right.\\ &\quad \left. - \frac{16(2+x)}{3x}\left(1 - \frac{x}{8}(x-4)\frac{d}{dx}\right)\frac{I(x)}{x}\right)\end{aligned} \tag{2.19}$$

mit den Funktionen

$$
\begin{aligned}
I(x) &= 6(\zeta_3 - 4\mathrm{Li}_3(-\mathrm{y}) + 2\mathrm{Li}_3(\mathrm{y})) - 8(2\mathrm{Li}_2(-\mathrm{y}) + \mathrm{Li}_2(\mathrm{y}))\log\mathrm{y} \\
&\quad -2(2\log(1+y) + \log(1-y))\log^2 y, \\
G(x) &= \frac{2y\log y}{y^2-1}, \quad u = \frac{\sqrt{1-4/x}-1}{\sqrt{1-4/x}+1}, \quad x = \frac{p^2}{m^2}.
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

In [32] ist es darüber hinaus gelungen, Polylogarithmen weiter auf eine Funktionenklasse, die sog. Harmonischen Polylogarithmen (HPL), zu verallgemeinern. Für HPLs lässt sich eine abgeschlossene Algebra bezüglich Multiplikation und Differentiation finden, was hervorragend zum Lösen von Differentialgleichungen, die für Mehr-Schleifen-Integrale aufgestellt werden können (siehe Kap. 4.3), verwendet werden kann. Allerdings sind HPLs im Allgemeinen bei Rechnungen höherer Ordnung als dem Zwei-Schleifen-Niveau nicht ausreichend, da sie aufgrund der Abhängigkeit von y, in dem innerhalb der Wurzeln das Schwellenverhalten für Zwei-Teilchen-Produktion direkt implementiert ist, nicht auf Probleme mit der Produktion von vier oder mehr massiven Teilchen angewendet werden können. Tatsächlich treten auf dem Drei-Schleifen-Niveau Diagramme auf, deren Imaginärteil dem Wirkungsquerschnitt für die Produktion von vier schweren Teilchen entspricht und die deshalb mit HPLs nicht beschrieben werden können. Einen Ausweg könnten in Zukunft vielleicht mehrdimensionale HPLs [33] oder deren weitere Verallgemeinerung darstellen.
Auf dem Drei-Schleifen-Niveau ist die Vakuum-Polarisationsfunktion näherungsweise bekannt [34]. In dieser Berechnung wurde allerdings von nur einem einzigen massiven Quark ausgegangen, während alle anderen leichten Quarks als masselos angenommen wurden. Die Berechtigung für diese Vereinfachung wird weiter unten mit der Darstellung des sog. Entkopplungs-Theorems gegeben. Das Ergebnis dieser Berechnung ist analytisch nicht bekannt, sondern wurde aus asymptotischen Entwicklungen in einzelnen kinematischen Bereichen und einer anschließenden Approximation erhalten. Genauer werden asymptotische Entwicklungen weiter unten diskutiert, die Approximation ist in Kap. 4.2 erläutert.
In $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ ist die Polarisationsfunktion für den Fall masseloser Quarks bekannt [35], Massenkorrekturen in diesem Grenzfall wurden in [36] bis $\mathcal{O}[(m^2/p^2)^2]$ erhalten. Diese Beiträge wurden ebenfalls aus einer asymptotischen Entwicklung im Limes $p^2 \to \infty$ erhalten.
Mittlerweile sind sogar Teil-Ergebnisse auf dem Fünf-Schleifen-Niveau im masselosen Grenzfall verfügbar [37]. Dabei wird ausgenutzt, dass der endliche Absorbtivteil eines masselosen Feynmanintegrals auf dem $(l+1)$-Schleifen-Niveau durch die endlichen und divergenten Teile eines l-Schleifen masselosen Feynmanintegrals ausgedrückt werden kann [38].

Das Entkopplungs-Theorem

Die Berechnung der Vakuumpolarisation mit voller Massenabhängigkeit für n_f verschiedene Flavours, also mit einer äußeren Skala p und n_f verschiedenen Massen, bringt einige Schwierigkeiten mit sich. Im Allgemeinen erhält man für eine Skala M in der Störungsentwicklung Terme der Form $\log M/\mu$, die sehr große Beiträge liefern können. Die übliche Beseitigung dieser Logarithmen geschieht bei nur einer im Problem involvierten Skala μ_0 über die Wahl der 't Hooft-Skala $\mu = \mu_0$, sodass die Logarithmen verschwinden. Diese Wahl ist bei mehreren Skalen jedoch nicht möglich. Glücklicherweise lässt sich dieses Problem durch die Anwendung eines Theorems von Appelquist und Carrazone [39] vereinfachen, wenn einige beteiligte Felder Massen besitzen, die viel größer als die äußere Skala sind.
Der Startpunkt ist eine Theorie, in der n_h Felder existieren, die eine viel größere Masse M im Vergleich zu den anderen n_l leichten Feldern mit Masse $m_l \approx m$, $l \leq n_l$ besitzen. Die Aussage des Theorems ist nun, dass Greens-Funktionen dieser Theorie bei kleinen Energien bis auf Renormie-

rungseffekte genau denen einer effektiven Theorie, die nur n_l leichte Felder enthält, entsprechen. Die Korrekturen, die die schweren Felder mit Masse M induzieren, tragen in der Störungsreihe nur mit $(M^2/p^2)^k$ bei und sind bei niedrigen Energien verschwindend klein. Als Folge hiervon erhält man eine effektive Theorie $\mathcal{L}_{\text{eff}}$, die frei von dem schweren Feld ist, sich aber von der vollen Theorie $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$ nicht nur in der Kopplung, sondern in allen freien Parametern unterscheidet.
Für die explizite Berechnung bedeutet dies, dass man im Grenzwert $M \gg \sqrt{s}$ das schwere Quark mit Masse M komplett vernachlässigen darf. Alle n_h schweren Quarks entkoppeln so und man reduziert die Anzahl der Skalen auf $n_l + 1$.
Daraus schreibt sich der Zusammenhang zwischen der nicht renormierten effektiven und der vollen Theorie als:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{(n_l+n_h)}(\alpha_s^{0'}, m_q^{0'}, \xi^{0'}; \psi_q^{0'}, A_\mu^{0',a}, c^{0',a}) = \mathcal{L}_{\text{eff}}^{(n_l)}(\alpha_s^0, m_q^0, \xi^0; \psi_q^0, A_\mu^{0,a}, c^{0,a}; \zeta_i^0) \tag{2.21}$$

mit der Anzahl der in der Theorie berücksichtigten leichten und schweren Flavours, n_l und n_h, der Kopplung α_s, den Quarkmassen m_q, dem Eichparameter ξ und den Quark-, Gluonen- und Geister-Feldern ψ_q, A_μ^a und c^a. Die effektive Theorie hängt von zusätzlichen Unbekannten, den Entkopplungs-Konstanten ζ_i ab, die die Parameteränderung beim Ausintegrieren der schweren Felder beinhalten und für die nackten Parameter definiert sind über

$$\alpha_s^{0'} = \zeta_{\alpha_s}^0 \alpha_s^0, \qquad m_q^{0'} = \zeta_m^0 m_q^0, \qquad \xi^{0'} - 1 = \zeta_\xi^0(\xi^0 - 1) \tag{2.22}$$

$$\psi_q^0 = \sqrt{Z_\psi}\psi_q, \qquad A_\mu^{0,a} = \sqrt{Z_A}A_\mu^a \qquad c^{0,a} = \sqrt{Z_c}c^a. \tag{2.23}$$

Kombiniert man diese Entkopplungs-Gleichungen mit der Renormierung der Parameter, so erhält man für die renormierten Entkopplungskonstanten der Kopplung und der Massen

$$\zeta_{\alpha_s} = \frac{Z_{\alpha_s}}{Z'_{\alpha_s}}\zeta_{\alpha_s}^0, \quad \zeta_m = \frac{Z_m}{Z'_m}\zeta_m^0. \tag{2.24}$$

Zur Berechnung der Entkopplungs-Konstanten ζ_{α_s} auf l Schleifen benötigt man beispielsweise, wie in [40] gezeigt wird, die Kenntnis von Vakuumdiagrammen auf dem l-Schleifen-Niveau, die sich aus Gluon- und Geist-Vakuumpolarisationen ergeben. Insgesamt ist diese Konstante bis $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ bekannt [41, 42].
Der Effekt der Entkopplungsrelationen auf die laufende Kopplungskonstante $\alpha_s(\mu)$ wird in Abb. 2.8 verdeutlicht. Das Laufen der Konstante unterhalb der Produktion des schweren Quarks wird von der $\beta^{(n_f)}$-Funktion mit n_f Flavours vorgegeben, an den Schwellen zu schweren Quarks besitzt $\alpha_s(\mu)$ Diskontinuitäten. Oberhalb der Schwelle zur Produktion eines Quarks mit Masse M und der Anzahl n_f an aktiven Flavours in der effektiven Theorie erhält man für die Kopplung mit dem Laufen aus der $\beta^{(n_f)}$-Funktion

$$\alpha_s^{(n_f)}(\mu) = \zeta_{\alpha_s}\alpha_s^{(n_f+1)}(\mu) \tag{2.25}$$

ζ_{α_s} ist dabei ebenfalls über eine Störungsreihe in $\alpha_s^{(n_f+1)}(\mu)$ definiert, Sprünge in der Kopplungskonstanten treten zuerst auf dem Zwei-Schleifen-Niveau auf.

Das KLN-Theorem

Zur weiteren Reduktion der bei der Berechnung der Vakuumpolarisation auftauchenden Skalen ist das sog. KLN-Theorem hilfreich, dass von Kinoshita [43], Lee und Nauenberg [44] bewiesen werden konnte. Im Allgemeinen beobachtet man bei der Berechnung von exklusiven Wirkungsquerschnitten logarithmische Divergenzen, die ihren Ursprung in der weichen und kolinearen

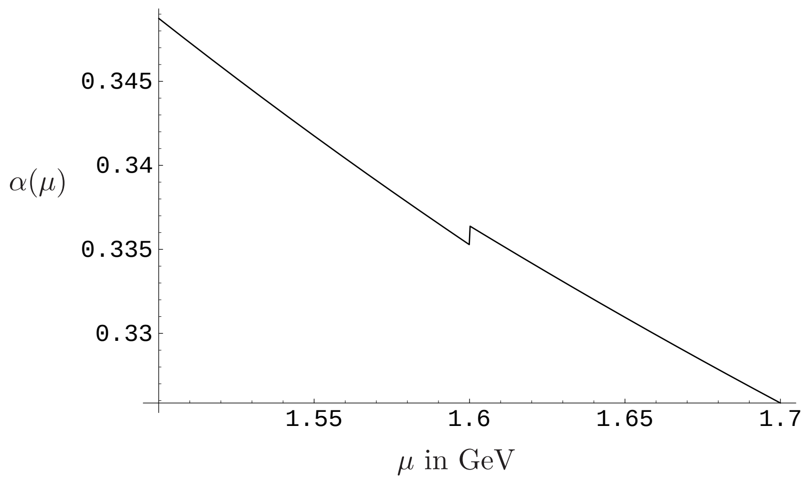


Abbildung 2.8: Das Laufen der Feinstrukturkonstante mit Berücksichtigung der Entkopplung. Vergrößert dargestellt ist der Sprung von $\alpha_s^{(3)}$ auf $\alpha_s^{(4)}$ an der Schwelle zur charm-Produktion

Abstrahlung von Teilchen im masselosen Limit haben und deshalb als Massendivergenzen bezeichnet werden. Das KLN-Theorem besagt nun, dass eine Aufsummation einer geeigneten Wahl von mehreren Anfangs- und Endzuständen zu Wirkungsquerschnitten führt, die auch in diesem Limit endlich sind.

Bei der Berechnung des inklusiven Wirkungsquerschnitts aus der Vakuumpolarisation wird bereits durch die Anwendung des optischen Theorems eine Summation über alle in einer gewissen Ordnung möglichen Endzustände erreicht und aus diesem Grund tauchen keine Massendivergenzen auf. Die Vereinfachung einer praktischen Berechnung ergibt sich nun wie folgt: Bezeichnet man die größte in dem jeweiligen Problem auftretende Skala mit M, so können alle Teilchen mit Masse m_l, für die $m_l \ll M$ gilt, auf Null gesetzt werden. Im Falle der Vakuumpolarisation mit einem schweren c-Quark, lassen sich so die Propagatoren der viel leichteren u-, d- und s-Quarks sicher als masselos ansehen und es bleiben insgesamt nur noch zwei zu berücksichtigende Skalen: der äußere Impuls und die schwere Masse M.

Asymptotische Entwicklungen

Im Allgemeinen handelt es sich also bei den Feynman-Diagrammen, die für die Berechnung der Vakuumpolarisation berücksichtigt werden müssen, um propagatorartige Graphen oder kurz Propagatoren. Diese besitzen eine äußere Skala und nach dem Entkopplungs-Theorem maximal eine (schwere) Masse. Während die Berechnung von masselosen Propagatoren analytisch noch relativ einfach durchführbar ist (s.u.), erfordern Propagatoren, die Felder mit einer schweren Masse enthalten, eine bedeutend größere Anstrengung.

Eine erfolgversprechende Aussicht auf die Berechnung solcher Feynmanintegrale in einzelnen kinematischen Regionen bieten asymptotische Entwicklungen in kleinen Parametern bzw. in Inversen großer Parameter. Systematische Methoden für die Durchführung solcher Entwicklungen konnten gefunden werden [45], um Diagramme mit einem großen äußeren Impuls (*large-*

momentum-expansion) bzw. einer großen internen Masse (*large-mass-expansion*) zu behandeln. Die so entstehende Reihe kann wiederum durch Produkte von Feynmanintegralen, die nur eine Skala besitzen, ausgedrückt werden. Von Vorteil ist, dass eine Einführung von neuen Objekten nicht nötig ist. Ein entscheidender Unterschied zur Taylorreihe ist herauszustellen: Die Koeffizienten dieser Entwicklungen sind keine Konstanten, sondern Funktionen der Entwicklungsvariablen, die im Entwicklungspunkt nichtanalytisch sein können. Beispielsweise ist eine Taylorreihenentwicklung der Funktion $f(x) = \mathrm{Li}_2(1-\mathrm{x})$ nur bis zum ersten Entwicklungsglied möglich, während eine asymptotische Entwicklung weitere Terme in der Entwicklung ergibt:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} + x(\log x - 1) + \mathcal{O}(x^2 \log x). \tag{2.26}$$

Für den zweiten Koeffizienten der Entwicklung gilt zwar $\lim_{x\to 0} x(\log x - 1) = 0$, die Funktion ist aber aufgrund einer Diskontinuität in der ersten Ableitung für $x \to 0$ nicht glatt.
Die asymptotische Entwicklung für große euklidische externe Impulse bzw. für große interne Massen basiert auf der gleichen Grundlage. Ausgangspunkt für die systematische Untersuchung ist die sog. R^*-Operation, eine Renormierungsvorschrift, die die Regularisierung von Infrarot(IR)-Polen, mitberücksichtigt [46]. In [45] konnte diese Operation mit der sog. Entwicklung nach Regionen identifiziert werden. Dabei wird in unterschiedlichen Regionen der Schleifenimpulse eine Entwicklung in den auftauchenden kleinen Parametern durchgeführt, die einzelnen Regionen lassen sich im Fall für große Impulse bzw. für große Massen mit Subgraphen des ursprünglichen Feynmanintegrals identifizieren. Formal lässt sich die Entwicklung schreiben als

$$F_\Gamma(Q, p, m) \approx \sum_\gamma T_{p_\gamma, m_\gamma} F_\gamma(Q, p_\gamma, m_\gamma) \circ F_{\Gamma/\gamma}(p, m). \tag{2.27}$$

F_Γ ist hier der zu entwickelnde Feynmangraph, $Q(p, m)$ beinhaltet, je nach Art der Entwicklung, die großen Impulse bzw. Massen des Graphen und die Summe geht über alle Subgraphen F_γ von F_Γ. Die Wahl der Subgraphen F_γ hängt von der gewünschten Entwicklung ab und wird später beschrieben. T_{p_γ, m_γ} entspricht der Taylorreihenentwicklung in $\{p_\gamma, m_\gamma\}$, also allen kleinen Parametern. Die Verknüpfung $\circ$ bedeutet hier, dass die Taylorreihenentwicklung vor der Integration über Schleifenimpulse durchgeführt wird, der Subgraph F_γ wird also vorher durch den in den Parametern $\{p_\gamma, m_\gamma\}$ entwickelten Subgraphen ersetzt.
Der entscheidende Unterschied zwischen der large-momentum- und der large-mass-expansion liegt nun in der Wahl der Subgraphen, die als asymptotisch irreduzibel (AI) bezeichnet werden. Im Falle der large-momentum-expansion ist ein Subgraph F_γ AI, wenn

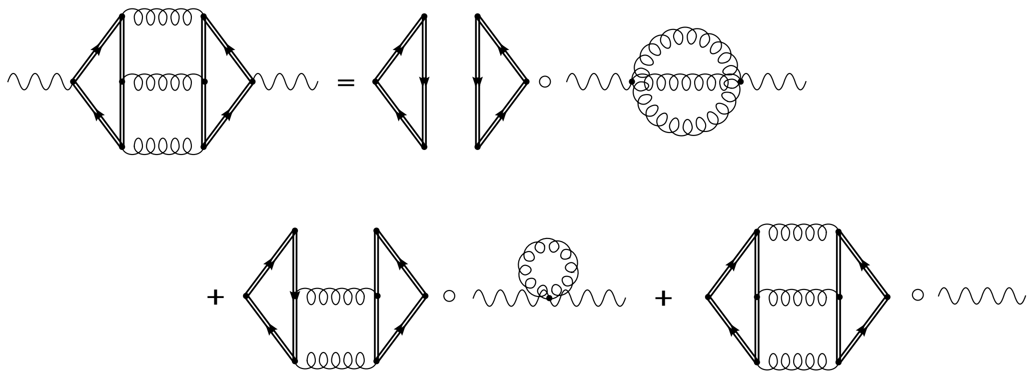
- alle Vertizes von F_Γ mit großen externen Impulsen auch Vertizes von F_γ sind,
- der Subgraph $F_{\gamma'}$, der sich durch Identifikation aller externen Vertizes mit großen Impulsen ergibt, Ein-Teilchen-irreduzibel ist.

Alle so erhaltenen Subgraphen F_γ werden nach Durchführung der Taylorreihenentwicklung masselos und hängen nur noch von den Skalen der großen externen Impulse ab. Die Reste des Graphen $F_{\Gamma/\gamma}$ hängen weiterhin von kleinen äußeren Impulsen und Massen ab, sind aber im Allgemeinen bedeutend einfacher als der ursprüngliche Graph. Im Fall der Vakuumpolarisation existiert nur ein großer äußerer Impuls und man erhält in diesem einfachsten Fall masselose Propagatoren als Subgraphen. Die Entwicklung wird wegen der Berücksichtigung nur einer Massenskala üblicherweise in m^2/p^2 durchgeführt. Hier wird auch deutlich, warum nichtanalytische Funktionen als Koeffizienten auftauchen können: masselose Propagatoren - Subgraphen und somit Koeffizienten in der Entwicklung - besitzen im Allgemeinen Strukturen der Form $\log(p^2/\mu^2)$, die im asymptotischen Limit divergent sind.

Interessiert man sich für den Fall kleiner äußerer Impulse und einer großen internen Massenskala, so wird die large-mass-expansion angewendet. In diesem Fall ist ein Subgraph F_γ AI, wenn

- alle massiven Linien von F_Γ auch Linien von F_γ sind,
- er Ein-Teilchen-irreduzibel in den leichten Linien, also nach Kontraktion der schweren Linien, ist.

Die Subgraphen F_γ entsprechen in diesem Fall nach der Taylorreihenentwicklung massiven Vakuumdiagrammen, Feynmangraphen mit verschwindendem äußeren Impuls, und Restgraphen $F_{\Gamma/\gamma}$, die nur noch von den kleinen Massen und Impulsen abhängen. Im Falle von Zwei-Punkt-Funktionen mit nur einer Massenskala erhält man als Restgraphen wieder masselose Propagatoren.
Am Beispiel des linken Singlet-Diagramms aus Abb. 2.7 lässt sich das Prinzip der large-mass-expansion verdeutlichen. Dieses Diagramm besitzt zwei massive fermionische Linien, die immer gemeinsam absepariert werden müssen. Insgesamt müssen also drei Subgraphen berücksichtigt werden. In der Notation aus Gl. (2.27) erhält man so im Grenzwert $p^2 \ll m^2$:



Doppelte Linien entsprechen hierbei massiven, einfache Linien masselosen Propagatoren. Diese Konvention wird in dieser Arbeit für alle skalaren Diagramme verwendet.
Der zweite Restgraph enthält eine masselose Schleife, die in dimensionaler Regularisierung verschwindet:

$$\int \frac{d^d k}{k^2} = 0. \tag{2.28}$$

Insgesamt erhält man so für dieses Singlet-Diagramm [47]:

$$\begin{aligned}\Pi^{\mathrm{S}}_{\mu\nu}(p^2) &= (-p^2 g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu)\Pi^{\mathrm{S}}(p^2) \\ &= \frac{17}{218700\pi^2}\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3(-p^2 g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu)\left(\frac{p^2}{4m^2}\right)^4 \log\left(\frac{m^2}{-p^2}\right) + \mathcal{O}\left[\left(\frac{p^2}{m^2}\right)^5\right] \end{aligned} \tag{2.29}$$

Taylorreihenentwicklungen

Vernachlässigt man zunächst die auftauchenden Singlet-Diagramme, so stellt man fest, dass es möglich ist, eine einfache Taylorreihenentwicklung der Vakuumpolarisation für kleine $x = p^2/m^2$

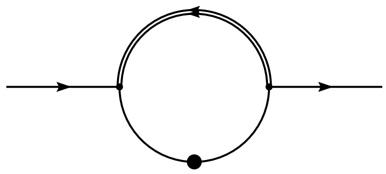


Abbildung 2.9: Diagramm als Beispiel zur Taylorreihenentwicklung

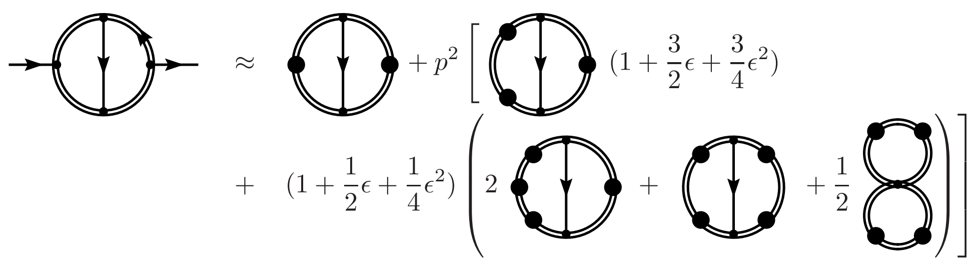
durchzuführen:

$$\Pi^h_{nS}(x) \approx \Pi^h_{nS}(0) + \frac{\partial}{\partial x}\Pi^h_{nS}(x)\bigg|_{x=0} x + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Pi^h_{nS}(x)\bigg|_{x=0} x^2 + \ldots, \tag{2.30}$$

der Index nS deutet dabei auf die Vernachlässigung von Singlet-Diagrammen hin.
Tatsächlich kann man zeigen, dass Ableitungen bezüglich x mit anschließendem Nullsetzen $x = 0$ nur dann möglich sind, wenn die beiden äußeren Vertizes mit einer durchgehenden massiven Linie verbunden sind. Berechnet man nämlich einen Taylorkoeffizienten eines Diagramms mit dem Fluss des externen Impulses durch eine masselose Linie, so erzeugt man im Allgemeinen eine künstliche IR-Divergenz, die der ursprüngliche Feynmangraph nicht besitzt. Betrachtet man das Diagramm in Abb. 2.9 und bestimmt den ersten Taylorkoeffizienten, so ergibt sich im Limit $p^2 \to 0$ eine IR-Divergenz:

$$p^2\frac{\partial}{\partial p^2}\int\frac{d^4k}{(p-k)^2(k^2-m^2)} = \int\frac{2p(p-k)\,d^4k}{(p-k)^6(k^2-m^2)} \xrightarrow{p^2\to 0} -\int\frac{2pk\,d^4k}{k^4(k^2-6pk)(k^2-m^2)} \tag{2.31}$$

Im Beispiel der Singlet-Beiträge in $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ ist eine Taylorreihenentwicklung also aufgrund des Flusses des externen Impulses durch eine masselose Linie nicht möglich. Dies spiegelt die logarithmische Abhängigkeit des aus der large-mass-expansion erhaltenen qualitativen Ergebnisses wider.
Der Vorteil der Taylorreihenentwicklung ergibt sich nun aus der Tatsache, dass die rechte Seite von Gleichung (2.30) sich vollständig durch Vakuumdiagramme, die nur von einer Massenskala m abhängen, darstellen lässt, wie man am folgenden skalaren Zwei-Schleifen-Beispiel erkennt:



(2.32)

(2.33)

Ein Punkt auf einer Linie bedeutet die Erhöhung des Exponenten des entsprechenden Propagators um eins.

Masselose Propagatoren und Vakuumdiagramme

Asymptotische Entwicklungen der Vakuumpolarisation führen somit auf zwei Klassen von Diagrammen: masselose Propagatoren und Vakuumdiagramme mit einer einzigen Massenskala. Masselose Propagatoren können in vielen Fällen relativ einfach berechnet werden, da sie oftmals in bekannte Ein- bzw. Zwei-Schleifen-Anteile separiert und rekursiv integriert werden können [4]. Ein Beispiel für ein solches Diagramm gibt Abb. 2.10(a). Allerdings treten bereits ab $\mathcal{O}(\alpha_s)$ Diagramme auf (Abb. 2.10(b)), die sich mit dieser Methode nicht berechnen lassen. Mit Hilfe von Identitäten, die aus partieller Integration (IBP) ermittelt werden können (siehe Anhang A), lässt sich die Anzahl dieser nichttrivialen Diagramme zwar reduzieren, ihre analytische Bestimmung stellt in hohen Ordnungen dennoch eine große Herausforderung dar [48].

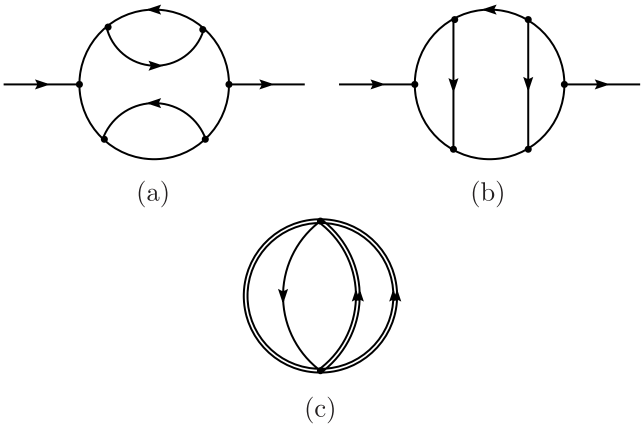


Abbildung 2.10: Aus asymptotischen Entwicklungen der Vakuumpolarisation resultierende Diagramme. (a) und (b): separierbarer und nichttrivialer masseloser Propagator, (c): Vakuumdiagramm mit nur einer Massenskala

Vakuumdiagramme mit einer Massenskala sind in der Literatur intensiv untersucht worden, wobei verschiedenste numerische und analytische Techniken zu ihrer Bestimmung Verwendung fanden. So wurde mit Hilfe eines systematischen Zugangs über Differenzgleichungen [49] eine Vielzahl von Vier-Schleifen-Vakuumdiagrammen numerisch bis zu hohen Ordnungen in ϵ und einer sehr hohen Genauigkeit erhalten [50], [51], [52]. Diese hohe Genauigkeit erlaubt es, analytische Ergebnisse mit dem sog. PSLQ-Verfahren zu erhalten [53], vorausgesetzt die Basis der in dem Problem enthaltenen Konstanten ist bekannt. Für eine direkte analytische Auswertung von Vakuumdiagrammen existiert kein allgemeiner Zugang, dennoch konnten viele Vakuumdiagramme mit unterschiedlichen Ansätzen bis zu moderaten Ordnungen in ϵ analytisch bestimmt werden[1].

2.4 Interpretationsprobleme

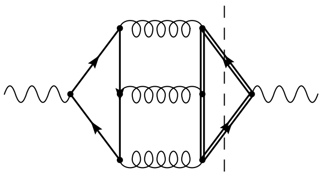
Die Beschränkung des Vektorstromkorrelators auf einen Strom, der ein schweres Quark enthält, führt bei genauerer Betrachtung in höheren Ordnungen in α_s zu Unstimmigkeiten. Üblicherweise wird angenommen, dass der Vektorstromkorrelator $\Pi^h(p^2)$ für schwere Quarks vollständig die

[1]Eine detaillierte Zusammenstellung findet sich in [51]

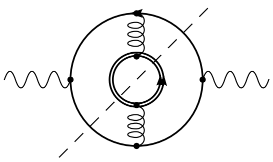
Produktion der schweren Quarks beschreibt. Die schon erwähnte Hypothese der Parton-Hadron-Dualität schreibt sich formal als eine Cauchy Summenregel

$$\mathcal{M}_n = \int_{s_0}^{\infty} ds \frac{R^h(s)}{s^{(n+1)}} \propto \int_{4m^2}^{\infty} ds \frac{\mathrm{Im}\Pi^{\mathrm{h}}(\mathrm{s})}{s^{(n+1)}} + \Pi_{\mathrm{nonpert}}. \tag{2.34}$$

Das Integral auf der linken Seite über den Wirkungsquerschnitt $R^h(s)$ für schwere Quarkproduktion startet bei s_0, der Energie, bei der die erste Produktion von Hadronen mit schweren Quarks beobachtet wird (üblicherweise Quarkonia). Auf der rechten Seite wird die perturbative Vorhersage $\Pi^h(p^2)$ ausgehend von der Schwelle für schwere Quark-Produktion bei $4m^2$ berücksichtigt, Π_{nonpert} steht für weitere Terme aus der OPE und nichtrelativistischer Coulomb-Resummation, die hier nicht genauer betrachtet werden. Der Unterschied in den Integrationsgrenzen reflektiert die unzureichende Beschreibung von langreichweitigen Effekten in der Störungstheorie.
Tatsächlich kann $\mathrm{Im}\Pi^{\mathrm{h}}(\mathrm{p}^2)$ allerdings nicht nur alleine durch den symmetrischen schweren Korrelator beschrieben werden, denn schon ab $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ tragen zur Produktion von schweren Quarks auch Diagramme bei, die aus unsymmetrischen und masselosen Stromkorrelatoren resultieren (siehe Abb. 2.11). Diese Diagramme müssen deshalb separat auf der rechten Seite von (2.34) mit Hilfe von Cutkosky-Regeln berücksichtigt werden. Dabei muss sichergestellt werden, dass alle zur Produktion des schweren Quarks beitragenden Diagramme addiert werden, da generell nur deren Summe einen reellen Absorbtivteil liefert.



(a)



(b)

Abbildung 2.11: Diagramme aus masselosen und unsymmetrischen Korrelatoren, die ebenfalls zur Produktion von schweren Quarks beitragen

Im Falle von Diagrammen mit einem Vier-Fermionen-Schnitt muss man besondere Vorsicht zur Wahrung der Konsistenz in (2.34) walten lassen. Die Wahl der beitragenden Diagramme hängt stark von der Observablen $R^h(s)$ im Experiment ab. Das Diagramm aus Abb. 2.11(b) trägt im Experiment mit einem 3-Jet-Ereignis bei, wobei einer der Jets schwere Quarks enthält, die von einem Gluon emittiert werden. Ist es möglich, diesen Jet als einen schweren Jet im Experiment zu identifizieren, so müssen diese Diagramme berücksichtigt werden. Problematisch ist jedoch, dass die Partonen dieses Jets im Allgemeinen nicht so energetisch sind wie bei einer reinen Produktion von schweren Quarks - der langreichweitige Anteil lässt sich deshalb nicht mehr eindeutig vom kurzreichweitigen Anteil separieren und es kann zu einer Annihilation dieser schweren Quarks kommen. Der Schnitt durch dieses Diagramm erzeugt so nicht mit absoluter Wahrscheinlichkeit ein Hadron mit schweren Partonen und die Parton-Hadron-Dualität (2.34) ist in diesem Fall nicht anwendbar.
Ein weiteres Problem ergibt sich im Falle des schweren Vektorstromkorrelators in $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ aus dem Absorbtivteil der Singlet-Diagramme aus Abb. 2.7. Diese Diagramme besitzen einen Schnitt durch drei gluonische Linien und tragen somit zur Produktion von schweren und leichten Hadronen bei. Da es unmöglich ist, die Produktion der leichten Hadronen in diesem Beitrag abzuseparieren, verliert Gleichung (2.34) ihre Gültigkeit, da nun die Integration auf der rechten Seite bei

$4m^2 = 0$ starten muss. Eine annähernde Lösung dieses Problems erreicht man durch Subtraktion des gesamten Beitrags des Drei-Gluonen-Schnitts $\mathrm{Im}\Pi^{3\mathrm{g}}(\mathrm{p}^2)$ in der Dispersionsrelation für den perturbativen Teil:

$$\Pi^h(p^2) = \frac{1}{\pi}\int_{4m^2}^{\infty} ds\, \frac{p^2 \mathrm{Im}\Pi^h(s)}{s(s-p^2)} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} ds\, \frac{p^2 \mathrm{Im}\Pi^{3\mathrm{g}}(s)}{s(s-p^2)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k (p^2)^k. \tag{2.35}$$

In [54] wird gezeigt, dass der Fehler klein ist, den man so durch die Vernachlässigung der schweren Quarkproduktion induziert.

Zusätzlich zu diesen Komplikationen wurde in [47] zum ersten Mal darauf hingewiesen, dass die Koeffizienten der Taylorreihenentwicklung der Vakuumpolarisation ab dem Term $(p^2)^4$ singulär werden, was nach der Diskussion des letzten Kapitels nicht verwundert. Differenziert man die large-mass-expansion (2.29) vier Mal nach p^2 ab, so erhält man

$$\left(\frac{d}{dp^2}\right)^4 \Pi^{\mathrm{S}}(p^2)\bigg|_{p^2\approx 0} = \frac{34}{18225\pi^2}\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3 \left(\frac{1}{4m^2}\right)^4 \left[\log\left(\frac{m^2}{-p^2}\right) - \frac{25}{12}\right], \tag{2.36}$$

was offensichtlich für $p^2 \to 0$ divergiert. In dieser Arbeit wird für die Berechnung der Quarkmassen nur der erste, nach dieser Diskussion auch für den Singletbeitrag endliche, Entwicklungskoeffizient der Taylorreihe benötigt. Aus diesem Grund soll auf die Möglichkeiten zur Beseitigung der zusätzlichen Divergenzen [55], die für die Anwendung von Summenregeln bei hohen Momenten essentiell sind, nicht eingegangen werden.

3 Quarkmassen und Momente von $\sigma(\mathrm{e^+e^-} \to \mathrm{Hadronen})$

3.1 Motivation

Quarkmassen spielen als fundamentale Parameter in der Lagrangedichte des Standardmodells eine wichtige Rolle in der Hochenergiephysik. Die genaue Kenntnis dieser Massen ist deshalb essentiell für das genaue Verständnis des SM und der Suche nach neuer Physik. Experimentell sind diese Parameter jedoch sehr schwer zugänglich, da Quarks aufgrund der starken Wechselwirkung nicht frei vorkommen können. Den einzigen Zugang zur Bestimmung von Quarkmassen stellt deshalb die Messung von Massen oder anderen Parametern von Hadronen dar, die im Anschluss mit theoretischen Vorhersagen verglichen werden.

Aus phänomenologischer Sicht ist eine genaue Kenntnis der Massen des c- und b-Quarks wichtig für Experimente, die den Flavour-Sektor des SM mit hoher Genauigkeit testen. Im Mittelpunkt stehen hier vor Allem die Untersuchungen der Zerfälle von B-Mesonen und Kaonen, aus denen die Phasen der Elemente der Cabbibo-Kobayashi-Maskawa (CKM)-Matrix gewonnen werden können. Neue Physik und CP-Verletzung können so getestet werden, wenn theoretische Vorhersagen klar mit dem Experiment in Einklang gebracht oder Diskrepanzen entdeckt werden können. Quarkmassen spielen hier eine wichtige Rolle: beispielsweise wird die theoretische Unsicherheit des CKM-Elements $|V_{td}|$, das aus dem Zerfall $K^+ \to \pi^+\nu\overline{\nu}$ bestimmt werden kann, von der Unsicherheit der Masse des c-Quarks dominiert [56].

Die Ermittlung von Quarkmassen benötigt auf theoretischer Seite den Einsatz verschiedener, in der Hadron-Physik zur Verfügung stehender, Methoden: Berechnungen werden z.B. in der Lattice QCD und mit Hilfe von Summenregeln in HQET (heavy quark effective theory) oder NRQCD (nonrelativistic QCD) durchgeführt. Jede dieser Methoden erfordert jeweils unterschiedliche Eingabe-Parameter und -Unsicherheiten des Hadron-Sektors und die Konsistenz der aus diesen Verfahren bestimmten Massen stellt einen wichtigen Test der theoretischen Verfahren dar.
Mit Hilfe der Lattice QCD wurden vor Allem die Massen der leichten Quarks berechnet [57], die aufgrund ihrer großen Masse schwieriger zu handhabenden schweren c- und b-Quarks werden in jüngerer Zeit in Angriff genommen.
Summenregeln machen Gebrauch von der Hadron-Parton-Dualität (2.34) bzw. ihrer Modifikationen. Dabei wird $\mathcal{M}_n$ je nach Wahl von n von verschiedenen Regionen dominiert und entsprechend muss $\Pi^h(p^2)$ aus unterschiedlichen Expansionen erhalten werden. So wird $\mathcal{M}_n$ für große n von den Quarkonia bestimmt und wegen der entstehenden Bindungszustände muss $\Pi^h(p^2)$ in NRQCD bestimmt werden. Ein Vergleich der erhaltenen Werte aus diesen Methoden wird am Ende des Kap. 3.4 angegeben.

In diesem Kapitel der Arbeit werden Quarkmassen mit Hilfe einer Summenregel mit $n = 1$ ermittelt, die sensitiv auf die relativistische Dynamik von $R(s)$ und somit auf die störungstheoretische Vorhersage des Vektorstromkorrelators ist. Als zentrales neues Ergebnis wird dabei das erste Moment der massiven Vakuumpolarisation in $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ vorgestellt (siehe auch [3]), das dann als Eingabeparameter in die Summenregel einfließt und so die Massen des c- und b-Quarks bestimmt werden.

3.2 Ermittlung von Quarkmassen

Die Basis für die Bestimmung von Quarkmassen bildet die Relation zwischen experimentellen und theoretischen Momenten der Photon-Vakuumpolarisation (2.6). Wie in Kap. 2.3 kann in perturbativer Näherung der im $\overline{\text{MS}}$-Schema renormierte Korrelator mit einer schweren Massenskala m für kleine Impulse in eine Taylor-Reihe entwickelt werden:

$$\Pi_h(p^2) = Q_h^2 \frac{3}{16\pi^2} \sum_{n\geq 0} \overline{C}_n x^n \quad \text{mit} \quad x = \frac{p^2}{4m^2(\mu)} \tag{3.1}$$

und den Koeffizienten

$$\overline{C}_n = \sum_{k\geq 0} (a)^k \sum_{l\leq k} \overline{C}_n^{(kl)} \log^l \left(\frac{m^2(\mu)}{\mu^2}\right). \tag{3.2}$$

mit $a = \alpha_s/\pi$. Die Koeffizienten dieser Reihe waren in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ bis vor Kurzem nur bis $n = 8$ analytisch bekannt [34], in dieser Arbeit konnten die Koeffizienten erstmalig bis $n = 30$ bestimmt werden (siehe Kap. 4.4). In $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ wird $\overline{C}_1$ als neues Ergebnis im nachfolgenden Abschnitt angegeben. Definiert man nun die theoretischen Momente als

$$\mathcal{M}_n^{\text{th}} = \frac{12\pi^2}{n!} \left(\frac{d}{dp^2}\right)^n \Pi_h(p^2)\Big|_{p^2=0} \tag{3.3}$$

so erhält man

$$\mathcal{M}_n^{\text{th}} = \frac{9}{4} Q_h^2 \left(\frac{1}{4m^2}\right)^n \overline{C}_n. \tag{3.4}$$

Im Folgenden werden wegen der einfachen Proportionalität von $\mathcal{M}_n^{\text{th}}$ und dem jeweiligem Koeffizienten $\overline{C}_n$ beide Größen als n-tes theoretisches Moment bezeichnet.
Mit Hilfe der Dispersionsrelation (2.7) lässt sich auf die experimentellen Momente

$$\mathcal{M}_n^{exp} = \int \frac{ds}{s^{n+1}} R(s) \tag{3.5}$$

schließen, wobei die unbekannte Konstante C_0 durch die Differentiation nach p^2 verschwindet. $R(s)$ beinhaltet hierbei nur den Wirkungsquerschnitt für Prozesse, bei denen mindestens ein schweres Quark paar produziert wird. Aus den Ausdrücken (3.4) und (3.5) erhält man eine Bestimmungsgleichung für die Masse des schweren Quarks:

$$m(\mu) = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{4} Q_h^2 \frac{\overline{C}_n}{\mathcal{M}_n^{exp}}\right)^{\frac{1}{2n}}. \tag{3.6}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung enthält im Allgemeinen Terme $\log(m^2(\mu)/\mu^2)^k$ mit $k > 0$, aufgrund derer die Auswertung der Masse nur numerisch erfolgen kann.
In Abhängigkeit von der Größe des Grades n der Momente ist allerdings Vorsicht bei Anwendung der perturbativen Näherung angebracht. Für große n sind die Beiträge zu den Momenten in der einzig durch pQCD zugänglichen Kontinuumregion unterdrückt und werden von den Resonanzregionen dominiert. Der Einfluss von nicht-perturbativen Bindungseffekten nimmt mit wachsendem n zu, eine nicht-relativistische Betrachtung ist der einzige sinnvolle Zugang und die Entwicklung

	n	1	2	3	4
c-Quark	g_n^0	-16.042	-26.737	-38.890	-52.352
	g_n^1	-15.028	13.006	78.710	190.935
b-Quark	g_n^0	-4.001	-6.684	-9.722	-13.088
	g_n^1	-4.876	1.386	16.964	44.081

Tabelle 3.1: Beiträge des Gluon-Kondensats zu den Momenten des c- und b-Quarks

(3.2) für den Korrelator ist nicht anwendbar [58]. Eine weitere Komplikation ergibt sich für $n > 4$ durch divergente Singlet-Beiträge in $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ (siehe Kap. 2.4).
Für große n ergeben sich also auf theoretischer Seite Komplikationen, der große Vorteil dieses Zugangs liegt jedoch in der Sensitivität auf die experimentell gut bekannten Spektren der Quarkonia und den daraus mit hoher Genauigkeit bekannten resultierenden experimentellen Momenten.
Im Fokus des Interesses stehen in dieser Arbeit aus diesem Grund die Momente kleinen Grades. Für kleine n sind die Momente durch eine relativistische Dynamik geprägt, was die Anwendung der OPE und damit der üblichen Störungsentwicklung in α_s erlaubt und das $\overline{\text{MS}}$-Schema zu einer natürlichen Wahl macht. Den dominierenden nicht-perturbativen Effekt zu den Momenten stellt hierbei das Gluon-Kondensat dar und man erhält für $\mu = m$

$$\mathcal{M}_n^{th} = \mathcal{M}_n^{th,pert} + \frac{\langle \frac{\alpha_s}{\pi}\mathbf{G}^2\rangle}{(4\,m(m))^{n+2}} \left(g_n^0 + \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right) g_n^1\right), \tag{3.7}$$

mit $\langle \alpha_s/\pi \mathbf{G}^2\rangle = 0.021\ \text{GeV}^4$ [59].
Tab. 3.1 gibt die Werte der Koeffizienten g_n^i aus [60] an. Diese wachsen mit zunehmendem n, während der perturbative Anteil im Allgemeinen mit wachsendem n abnimmt.
Im Nachfolgenden wird nur das erste Moment $\mathcal{M}_1$ diskutiert, da nur aus diesem eine Analyse der Quarkmasse durch rein perturbative Betrachtungen gerechtfertigt sein kann [61].

3.3 Erstes physikalisches Moment in $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$

Zunächst soll die Bestimmung des ersten theoretischen Moments $\overline{C}_1$ aus der Berechnung der QCD-Korrekturen in $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ zum Photon-Propagator dargestellt werden.
Zu diesem Zweck wurden in einem ersten Schritt alle 665 zur Vakuumpolarisation des Photons auf dem Vier-Schleifen-Niveau beitragenden Diagramme mit dem Programm *DiaGen* [62] erzeugt, auf skalare Integrale projiziert und in eine Taylorreihe um $p^2 = 0$ bis zur zweiten Ordnung in p^2 entwickelt. Anschließend wurden die ca. 270.000 daraus resultierenden skalaren Vakuum-Diagramme mit dem Programmpaket *IdSolver* [62] auf einen Satz von 13 sog. Masterintegralen reduziert (siehe Abb. 3.1). Diese Masterintegrale bilden eine Basis, sodass jedes der beitragenden Diagramme als eine Linearkombination aus Masterintegralen dargestellt werden kann. Das Problem vereinfacht sich somit von der Berechnung von Tausenden von Integralen auf nur 13 Unbekannte.
Die grundlegende Idee zur Reduktion der Integrale auf eine irreduzible Basis aus Masterintegralen sind sog. *integration by parts*-Identitäten (IBP) [63], mit deren Hilfe Relationen zwischen unterschiedlichen Feynman-Diagrammen gefunden werden können. Anhand eines Zwei-Schleifen-Beispiels wird das Prinzip der hier durchgeführten Behandlung der Diagramme und der Reduk-

tion mit Hilfe von IBPs ausführlich im Anhang A diskutiert. Systematisch untersucht wurden diese Relationen von Laporta und in Form eines Algorithmus veröffentlicht [49].
Bei dem hier verwendeten Programmpaket *IdSolver* handelt es sich um eine effiziente Implementierung dieses Algorithmus in `C++` und `FORM`, wobei zum Erreichen einer höheren Reduktionsgeschwindigkeit zahlreiche zusätzliche und vom ursprünglichen Algorithmus unabhängige Erweiterungen hinzugefügt wurden. So ergibt sich eine starke Beschleungigung durch die konsequente, automatisierte Untersuchung der Topologien und der daraus resultierenden Symmetrien der Diagramme. Mit der Implementierung einer parallelisierten Version von *IdSolver* und der Abkopplung des Auffindens von Relationen von dem eigentlichen Lösen der Relationen konnte ein riesiger Geschwindigkeitsgewinn erreicht werden. So wurde die im Folgenden beschriebene Berechnung überhaupt erst möglich und stellt die erste erfolgreiche Anwendung dieser Version des Programm dar.
Tatsächlich ist die Komplexität der Berechnung des ersten Moments auf die eigentliche Reduktion zu Masterintegralen zurückzuführen. Dabei ist die Anzahl der Diagramme nicht ungewöhnlich hoch, beispielsweise tauchten bei der Berechnung der Vier-Schleifen QCD-β-Funktion ca. 50.000 Diagramme auf [64]. Ausschlaggebend ist in dem hier diskutierten Problem die Taylorreihen-Entwicklung vor der eigentlichen Reduktion, die zu Vakuum-Integralen mit mehrfach potenzierten Propagatoren und komplexeren Impulsbeiträgen in den Zählern führt und so eine Anzahl von ca. 31 Millionen auszuwertenden Relationen erzeugt. Aus diesem Grund wurde die Berechnung am Computer Cluster des DESY in Zeuthen durchgeführt, wo in Spitzenzeiten bis zu 250 Prozessoren parallel an der Reduktion beteiligt waren und so innerhalb von ca. zwei Wochen das Ergebnis vorlag.
Alle aus der Reduktion hervorgehenden Masterintegrale (siehe Abb. 3.1) sind als Entwicklungen in ϵ bekannt [41], [65], in höheren ϵ-Ordnungen allerdings nur numerisch, was für die rein numerische Auswertung der Quark-Massen ausreichend ist.

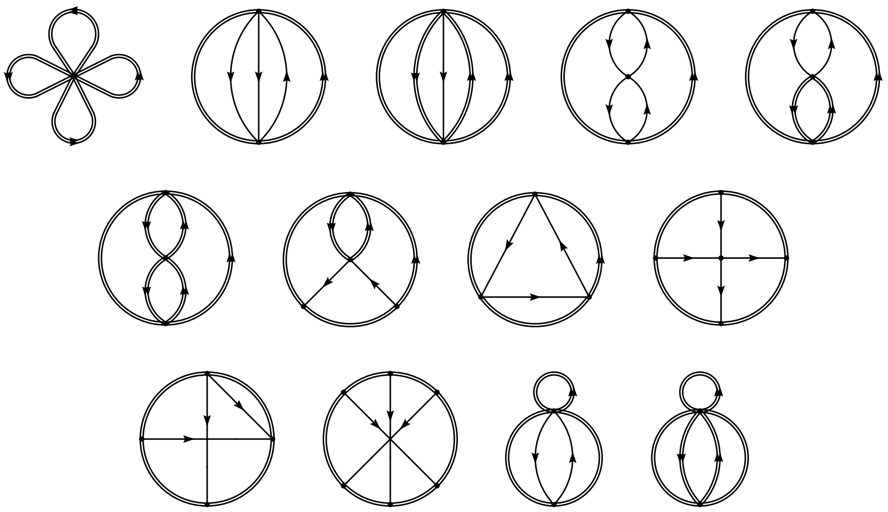


Abbildung 3.1: Masterintegrale

Zum Testen des erhaltenen Ergebnisses wurde in der Berechnung des nullten Moments (das dem Wert $\Pi(0)$ entspricht) der lineare Eichparameter ξ mit einem Entwicklungsglied explizit beibehalten. Wie zu erwarten ist das Resultat eichunabhängig und für das erste Moment wurde

zur Minimierung der Rechenzeit die Feynman-Eichung mit $\xi = 0$ gewählt. Ein weitaus wichtigerer Test ist die Renormierbarkeit des Endergebnisses. So muss es nach Durchführung der Parameter-Renormierung möglich sein, die übrig bleibende Divergenz über in p^2 konstante, also lokale, Subtraktionen zu beseitigen. Tatsächlich ist dies hier der Fall.
Das zentrale neue Ergebnis dieses Kapitels, der zum ersten physikalischen Moment $\mathcal{M}_1$ beitragende Koeffizient der Störungsentwicklung $\overline{C}_1$ in $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$, wird im Folgenden aus Gründen der Übersichtlichkeit in drei Anteile zerlegt,

$$\overline{C}_1 = \overline{C}_{\mathrm{b}} + \overline{C}_{1\mathrm{vf}} + \overline{C}_{2\mathrm{vf}}, \tag{3.8}$$

mit rein gluonischen Korrekturen $\overline{C}_{\mathrm{b}}$ und Korrekturen mit einer bzw. zwei virtuellen Quark-Schleifen $\overline{C}_{1\mathrm{vf}}$ und $\overline{C}_{2\mathrm{vf}}$.
Für den Beitrag der Diagramme mit einer virtuellen Fermionen-Schleife findet man

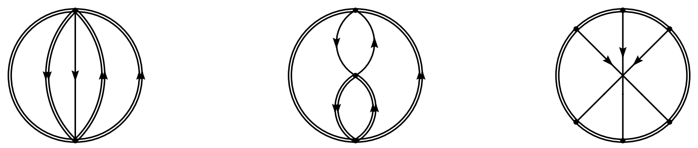
$$\begin{aligned}
\overline{C}_{1\mathrm{vf}} \;=\;& C_F^2\,T_F\,\Big(-\frac{155640216647897}{526727577600} + \frac{30661}{322560}\,N_1 - \frac{391510309}{179159040}\,\pi^2 - \frac{288518747}{174182400}\,\pi^4 \\
& -\frac{30661}{30481920}\,\pi^6 + \frac{127252}{945}\,a_4 + \frac{30661}{89600}\,\zeta_5 + \frac{318864713617}{1828915200}\,\zeta_3 + \frac{30661}{161280}\,\zeta_3\,\pi^2 \\
& -\frac{30661}{362880}\,\zeta_3^2 - \frac{31813}{5670}\,l_2^2\,\pi^2 + \frac{31813}{5670}\,l_2^4 - \frac{228583}{19440}\,l_m + \frac{139087}{12960}\,l_m\,\zeta_3 - \frac{22}{135}\,l_m^2 + \frac{2}{5}\,l_m^3\Big) \\
+\;& C_F^2\,T_F\,n_l\,\Big(\frac{1080947}{19440} + \frac{4793}{103680}\,N_3 - \frac{52723}{233280}\,\pi^2 + \frac{117811}{194400}\,\pi^4 - \frac{4793}{270}\,a_4 - \frac{857947}{194400}\,\zeta_5 \\
& -\frac{25009261}{466560}\,\zeta_3 - \frac{4793}{69984}\,\zeta_3\,\pi^2 + \frac{4793}{6480}\,l_2^2\,\pi^2 - \frac{4793}{6480}\,l_2^4 - \frac{19801}{2160}\,l_m + \frac{120817}{12960}\,l_m\,\zeta_3 \\
& -\frac{22}{135}\,l_m^2 + \frac{2}{5}\,l_m^3\Big) \\
+\;& C_F\,C_A\,T_F\,\Big(-\frac{11189587381799}{429185433600} + \frac{65}{2592}\,N_3 + \frac{11339}{645120}\,N_1 - \frac{188717291}{358318080}\,\pi^2 \\
& -\frac{6364753}{69672960}\,\pi^4 - \frac{11339}{60963840}\,\pi^6 + \frac{8194}{945}\,a_4 + \frac{1724977}{43545600}\,\zeta_5 + \frac{360428176373}{40236134400}\,\zeta_3 \\
& -\frac{156623}{78382080}\,\zeta_3\,\pi^2 - \frac{11339}{725760}\,\zeta_3^2 - \frac{4097}{11340}\,l_2^2\,\pi^2 + \frac{4097}{11340}\,l_2^4 - \frac{775451}{349920}\,l_m - \frac{7013}{25920}\,l_m\,\zeta_3 \\
& +\frac{1051}{3645}\,l_m^2 - \frac{44}{135}\,l_m^3\Big) \\
+\;& C_F\,C_A\,T_F\,n_l\,\Big(-\frac{31394101}{1049760} - \frac{4793}{207360}\,N_3 + \frac{52723}{466560}\,\pi^2 - \frac{26483}{388800}\,\pi^4 + \frac{4793}{540}\,a_4 \\
& +\frac{857947}{388800}\,\zeta_5 + \frac{7792237}{933120}\,\zeta_3 + \frac{4793}{139968}\,\zeta_3\,\pi^2 - \frac{4793}{12960}\,l_2^2\,\pi^2 + \frac{4793}{12960}\,l_2^4 - \frac{627893}{116640}\,l_m \\
& +\frac{4183}{2880}\,l_m\,\zeta_3 + \frac{1051}{3645}\,l_m^2 - \frac{44}{135}\,l_m^3\Big),
\end{aligned} \tag{3.9}$$

mit n_l masselosen Quarks. T_F ist dabei Spur über die fundamentale Darstellung während C_F und C_A die Casimir-Operatoren der fundamentalen und adjungierten Darstellungen der $SU_C(N)$-Gruppe sind, siehe auch Anhang B. Außerdem sind $l_m = \log(m^2(\mu)/\mu^2)$, $l_2 = \log 2$, $a_i = \mathrm{Li_i}(1/2)$ mit dem Polylogarithmus $\mathrm{Li_i(x)}$ und den Riemann-Zetas $\zeta_i = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-i}$. Unter der Annahme, dass die leichten Quarks masselos sind und nur eine einzige Quarksorte massenbehaftet ist, hängt das Ergebnis nicht explizit von der Anzahl der schweren Quarks ab. Alle Terme, die nicht proportional zu n_l sind, stammen deshalb von virtuellen schweren Fermionen-Schleifen.

Für den rein bosonischen Anteil zu $\overline{C}_1$ erhält man

$$
\begin{aligned}
\overline{C}_{\mathrm{b}} \;=\;& C_F^3 \Bigg(\frac{45577758023909}{56435097600} - \frac{454}{2835}\, N_5 + \frac{173}{1080}\, N_4 + \frac{1078129}{3628800}\, N_3 + \frac{79}{1920}\, N_2 - \frac{8881}{604800}\, N_1 \\
& - \frac{3546972523}{4702924800}\, \pi^2 + \frac{1533371173}{653184000}\, \pi^4 \frac{24802703}{342921600}\, \pi^6 + \frac{8192}{45}\, a_5 - \frac{252157}{4050}\, a_4 + \frac{79}{3360}\, \zeta_7 \\
& - \frac{5193373091}{27216000}\, \zeta_5 + \frac{79}{7200}\, \zeta_5\, \pi^2 - \frac{75721242853}{195955200}\, \zeta_3 - \frac{95128427}{48988800}\, \zeta_3\, \pi^2 + \frac{79}{21600}\, \zeta_3\, \pi^4 \\
& - \frac{10306609}{4082400}\, \zeta_3^2 + \frac{4352}{2025}\, l_2\, \pi^4 + \frac{252157}{97200}\, l_2^2\, \pi^2 + \frac{1024}{405}\, l_2^3\, \pi^2 - \frac{252157}{97200}\, l_2^4 - \frac{1024}{675}\, l_2^5 \\
& - \frac{6142460327}{22394880}\, l_m - \frac{173}{270}\, l_m\, N_3 - \frac{79}{480}\, l_m\, N_1 + \frac{12907273}{1866240}\, l_m\, \pi^2 + \frac{215987}{777600}\, l_m\, \pi^4 \\
& + \frac{79}{45360}\, l_m\, \pi^6 - \frac{16384}{135}\, l_m\, a_4 + \frac{1962691}{32400}\, l_m\, \zeta_5 + \frac{6307081}{155520}\, l_m\, \zeta_3 + \frac{36163}{58320}\, l_m\, \zeta_3\, \pi^2 \\
& + \frac{79}{540}\, l_m\, \zeta_3^2 + \frac{2048}{405}\, l_m\, l_2^2\, \pi^2 - \frac{2048}{405}\, l_m\, l_2^4 - \frac{103}{90}\, l_m^2 + \frac{3}{5}\, l_m^3 \Bigg) \\
+\;& C_F^2\, C_A \Bigg(-\frac{4622898495103}{5374771200} + \frac{227}{945}\, N_5 - \frac{103}{288}\, N_4 - \frac{916241}{14515200}\, N_3 - \frac{87}{1280}\, N_2 - \frac{71941}{403200}\, N_1 \\
& + \frac{487467767}{3135283200}\, \pi^2 - \frac{3579168251}{1306368000}\, \pi^4 - \frac{36666499}{228614400}\, \pi^6 - \frac{224}{15}\, a_5 - \frac{313387}{16200}\, a_4 - \frac{87}{2240}\, \zeta_7 \\
& + \frac{10395883727}{54432000}\, \zeta_5 - \frac{29}{1600}\, \zeta_5\, \pi^2 + \frac{40758646507}{130636800}\, \zeta_3 + \frac{463655219}{97977600}\, \zeta_3\, \pi^2 - \frac{29}{4800}\, \zeta_3\, \pi^4 \\
& + \frac{15591581}{2721600}\, \zeta_3^2 - \frac{119}{675}\, l_2\, \pi^4 + \frac{313387}{388800}\, l_2^2\, \pi^2 - \frac{28}{135}\, l_2^3\, \pi^2 - \frac{313387}{388800}\, l_2^4 + \frac{28}{225}\, l_2^5 \\
& + \frac{4315007269}{4976640}\, l_m + \frac{103}{72}\, l_m\, N_3 + \frac{87}{320}\, l_m\, N_1 - \frac{5492587}{414720}\, l_m\, \pi^2 + \frac{1313957}{518400}\, l_m\, \pi^4 \\
& - \frac{29}{10080}\, l_m\, \pi^6 + \frac{448}{45}\, l_m\, a_4 - \frac{2928779}{21600}\, l_m\, \zeta_5 - \frac{32483549}{103680}\, l_m\, \zeta_3 - \frac{61259}{38880}\, l_m\, \zeta_3\, \pi^2 \\
& - \frac{29}{120}\, l_m\, \zeta_3^2 - \frac{56}{135}\, l_m\, l_2^2\, \pi^2 + \frac{56}{135}\, l_m\, l_2^4 + \frac{259}{108}\, l_m^2 - \frac{11}{10}\, l_m^3 \Bigg) \\
+\;& C_F\, C_A^2 \Bigg(\frac{25490069288387}{112870195200} - \frac{227}{2835}\, N_5 + \frac{1199}{8640}\, N_4 - \frac{413339}{9676800}\, N_3 + \frac{91}{3840}\, N_2 + \frac{3511}{37800}\, N_1 \\
& + \frac{1042284611}{9405849600}\, \pi^2 + \frac{361381739}{1306368000}\, \pi^4 + \frac{42598397}{685843200}\, \pi^6 - \frac{1712}{45}\, a_5 + \frac{272567}{10800}\, a_4 + \frac{13}{960}\, \zeta_7 \\
& - \frac{613974553}{9072000}\, \zeta_5 + \frac{91}{14400}\, \zeta_5\, \pi^2 + \frac{277861513}{195955200}\, \zeta_3 - \frac{15355283}{8164800}\, \zeta_3\, \pi^2 + \frac{91}{43200}\, \zeta_3\, \pi^4 \\
& - \frac{18234067}{8164800}\, \zeta_3^2 - \frac{1819}{4050}\, l_2\, \pi^4 - \frac{272567}{259200}\, l_2^2\, \pi^2 - \frac{214}{405}\, l_2^3\, \pi^2 + \frac{272567}{259200}\, l_2^4 + \frac{214}{675}\, l_2^5 \\
& - \frac{15657616211}{44789760}\, l_m - \frac{1199}{2160}\, l_m\, N_3 - \frac{91}{960}\, l_m\, N_1 + \frac{3652601}{746496}\, l_m\, \pi^2 - \frac{2078929}{1555200}\, l_m\, \pi^4 \\
& + \frac{13}{12960}\, l_m\, \pi^6 + \frac{3424}{135}\, l_m\, a_4 + \frac{3411823}{64800}\, l_m\, \zeta_5 + \frac{42077383}{311040}\, l_m\, \zeta_3 + \frac{73807}{116640}\, l_m\, \zeta_3\, \pi^2 \\
& + \frac{91}{1080}\, l_m\, \zeta_3^2 - \frac{428}{405}\, l_m\, l_2^2\, \pi^2 + \frac{428}{405}\, l_m\, l_2^4 - \frac{13597}{14580}\, l_m^2 + \frac{121}{270}\, l_m^3 \Bigg). \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

Die numerischen Konstanten N_i sind die zum Zeitpunkt der Berechnung analytisch unbekannten Koeffizienten aus höheren Ordnungen in der ϵ-Entwicklung der Masterintegrale (siehe Abb. 3.3)



$\ldots + N_1\epsilon^2 + N_2\epsilon^3$ $\qquad$ $\ldots + N_3\epsilon + N_4\epsilon^2$ $\qquad$ $N_5\epsilon^0$

Abbildung 3.2: Definition der numerischen Konstanten aus der Entwicklung der Masterintegrale in ϵ

und lauten

$$
\begin{aligned}
N_1 &= +2369.669517745751, \\
N_2 &= +9090.208679977050, \\
N_3 &= -764.0948373358558, \\
N_4 &= -4647.352454831194, \\
N_5 &= -1.808879546208335.
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

Die letzten Beiträge, Korrekturen mit zwei virtuellen Fermionen-Schleifen, schreiben sich als:

$$
\begin{aligned}
\overline{C}_{2\mathrm{vf}} \;=\;& C_F\,T_F^2\left(\frac{163868}{98415} - \frac{3287}{2430}\,\zeta_3 - \frac{14483}{21870}\,l_m + \frac{203}{324}\,l_m\,\zeta_3 + \frac{236}{3645}\,l_m^2 + \frac{8}{135}\,l_m^3\right) \\
&+ C_F\,T_F^2\,n_l\left(-\frac{782857}{65610} - \frac{29}{2592}\,N_3 + \frac{319}{5832}\,\pi^2 - \frac{319}{4860}\,\pi^4 + \frac{116}{27}\,a_4 + \frac{5191}{4860}\,\zeta_5 + \frac{340313}{58320}\,\zeta_3\right. \\
&\left. + \frac{145}{8748}\,\zeta_3\,\pi^2 - \frac{29}{162}\,l_2^2\,\pi^2 + \frac{29}{162}\,l_2^4 - \frac{3779}{21870}\,l_m + \frac{203}{324}\,l_m\,\zeta_3 + \frac{472}{3645}\,l_m^2 + \frac{16}{135}\,l_m^3\right) \\
&+ C_F\,T_F^2\,n_l^2\left(\frac{42173}{32805} - \frac{112}{135}\,\zeta_3 + \frac{1784}{3645}\,l_m + \frac{236}{3645}\,l_m^2 + \frac{8}{135}\,l_m^3\right)
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

und stimmen perfekt Übereinstimmung mit [65] überein. Aus diesem Gesamtergebnis lässt sich nun auch leicht das erste Moment der rein abelschen Vakuumpolarisation gewinnen, indem man $C_F = 1$, $C_A = 0$ und $T_F = 1$ setzt.

3.4 Massenbestimmung des c- und b-Quarks

Zur Bestimmung der Massen der schweren c- und b-Quarks ist neben der theoretischen Vorhersage der Vakuumpolarisation noch die Kenntnis des experimentellen Moments $\mathcal{M}_1^{\mathrm{exp}}$ nötig. Dies ergibt sich aus $R(s)$ durch Extraktion und der anschließenden Integration des Wirkungsquerschnitts für die Produktion von mindestens einem Paar des interessierenden Quarks, zusammen mit der Abstrahlung von beliebig vielen leichten Quarks und Gluonen. Praktisch erreicht man dies aufgrund der teilweise nur lückenhaften experimentellen Daten aus einer Analyse, die Experiment und theoretische Vorhersagen kombiniert. Dabei werden zwei Bereiche unterschieden: die Resonanzregion an der Schwelle zur Produktion von Quarkpaaren zusammen mit den Quarkonia und die Kontinuum-Regionen. Erstere ist experimentell gut bekannt, für Letztere werden die Vorhersagen aus pQCD und lokaler Dualität als zuverlässig angesehen und verwendet, denn vor Allem im Bereich oberhalb der charm- und bottom-Schwellen ist die experimentelle Kenntnis unzureichend.

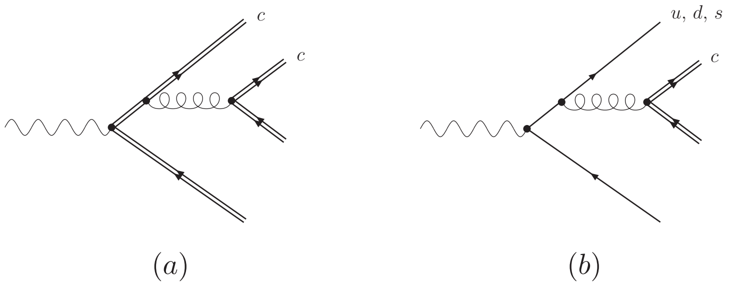


Abbildung 3.3: Diagramme, die zu der Produktion von schweren Quarks in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ beitragen: (a) ist bereits im Stromkorrelator enthalten, (b) muss separat berücksichtigt werden.

Die nachfolgende Analyse stützt sich auf die unterschiedliche Behandlung dieser beiden Regionen und basiert auf [66]. Da seit Erscheinen dieser Publikation neue Daten nur für die J/Ψ- und Ψ′-Resonanzen vorliegen, liefert die Auswertung weitestgehend identische Werte für die Beiträge zum ersten experimentellen Moment und dessen Fehler.
Als Eingabe-Parameter für die Auswertung von $R(s)$ werden die Pol-Massen M_Q der Quarks und die Kopplung an der Z^0-Resonanz benötigt:

$$\begin{aligned} M_c &= (1.65 \pm 0.15)\,\text{GeV}, \\ M_b &= (4.75 \pm 0.20)\,\text{GeV}, \\ \alpha_s^{(5)}(M_Z) &= 0.118 \pm 0.003. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Diese Größen entsprechen den momentan aktuellsten akzeptierten Werten [67, 68, 69] und einer sich daraus ergebenden konservativen Fehlerabschätzung. Weiterhin werden Renormierungsgruppen-Funktionen benötigt, um das Laufen der Kopplung und der Massen zwischen verschiedenen Energiebereichen mit unterschiedlicher Zahl von Flavours und richtigen Anschlussbedingungen an den Unstetigkeitsstellen zu erhalten. Alle Berechnungen dieser Art wurden mit dem Paket `RunDec` [70] durchgeführt.

Experimentelle Momente

In den unterschiedlichen kinematischen Bereichen werden nun die experimentellen Momente ermittelt und deren Unsicherheiten diskutiert.
Im Allgemeinen lassen sich die Kontinuum-Regionen oberhalb und unterhalb der Schwelle zur Produktion eines schweren Quarks mit der Anwendung von Cutkosky-Rules auf die pQCD-Vorhersagen und der Fortsetzung aus dem Euklidischen in den Minkowski-Raum gut approximieren. Am Beispiel des c-Quarks werden nun alle dabei zu betrachtenden Beiträge ausführlich diskutiert, bis auf wenige Ausnahmen wird analog hierzu die Region um das b-Quark behandelt und deshalb im Anschluss zusammen mit dem Wert des experimentellen Moments nur kurz erläutert.
Unterhalb der charm-Schwelle bei 3.73 GeV ist aufgrund des großen Massenunterschieds zwischen u,d,s- und c-Quark eine masselose Näherung mit $n_f = 3$ aktiven Flavours gerechtfertigt. Bekannt ist dieser Beitrag bis zu $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ [35] und entspricht der Produktion der drei leichten Quarks. Die dimensionslose Skala μ wird dabei gleich der Schwerpunktsenergie p^2 gesetzt und das Laufen von $\alpha_s(\mu)$ berücksichtigt. In dieser Approximation sind Diagramme mit virtuellen schweren Quarks nicht enthalten und müssen noch zusätzlich berücksichtigt werden [71].

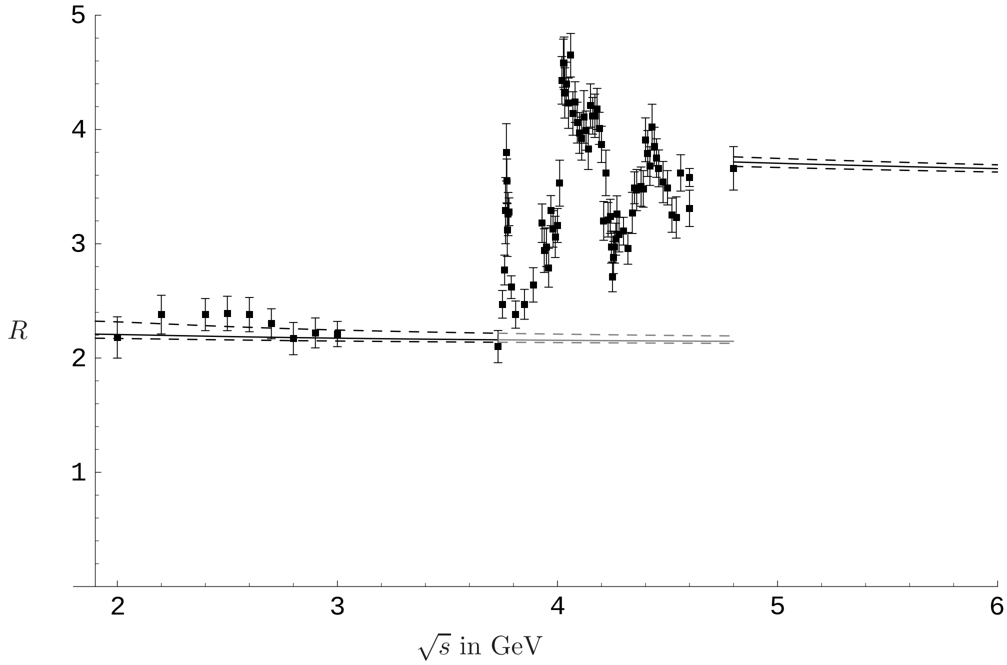


Abbildung 3.4: $R(s)$ an der charm-Schwelle aus den in diesem Bereich genauesten Daten der BES-Kollaboration [16], die Fehlerbalken entsprechen dem systematischen Fehler. Die durchgezogene Linie entspricht der pQCD-Vorhersage und gestrichelt ist deren Variation mit der Unsicherheit von α_s eingezeichnet (vgl. Text).

Oberhalb der charm-Schwelle wird die Produktion von u,d,s-Quarks nach wie vor im masselosen Limit ermittelt, allerdings mit $n_f = 4$. Die Produktion des c-Quarks, die bis zu $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ mit voller Massenabhängigkeit bekannt ist [34], wird addiert. Die Skala μ wird hierbei auf die einzige relevante Skala in der Schwellenregion, die Polmasse M_c, gesetzt. Die Unsicherheit der Polmasse hat dabei einen zu vernachlässigenden Einfluss auf den Verlauf der pQCD-Vorhersage. Dieser Drei-Schleifen-Beitrag beinhaltet die Produktion von sekundären c-Quarks entsprechend Abb. 3.3 (a), nicht enthalten ist der ebenfalls zu berücksichtigende Prozess aus Abb. 3.3 (b), der in [72] berechnet wurde. Außerdem bekannt und in die Analyse eingeflossen sind Massenkorrekturen in $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$, die aus einer Entwicklung bis zur zweiten Ordnung in M_c^2/p^2 verfügbar sind [36]. Zusammen ergeben diese Beiträge eine sehr gute Annäherung an die experimentellen Daten bis nahe an die Schwelle ($\sqrt{s} > 4.8\,\text{GeV}$) heran. Abb. 3.4 gibt einen guten Eindruck von der Qualität der theoretischen Vorhersagen ober- und unterhalb der Schwelle.
Der Anteil des Kontinuums zum ersten experimentellen Moment zur Bestimmung der Masse des c-Quarks ergibt sich aus der Integration der pQCD-Vorhersage nach (3.5) für das c-Quark oberhalb von $\sqrt{s} = 4.8\,\text{GeV}$ ohne Hinzunahme der Produktion von leichten Quarks.
Die Resonanzen unterhalb der Schwelle werden mit der sog. *narrow width approximation* genähert

$$R_{res}(s) = \frac{9\pi M_R \Gamma}{\alpha_0^2}\left(\frac{\alpha_0}{\alpha(s)}\right)^2 \delta(s - M_R^2), \tag{3.14}$$

mit der Masse der Resonanz M_R, der Zerfallsbreite Γ, der laufenden Feinstrukturkonstante $\alpha(s)$ und der Feinstrukturkonstante im Thompsonlimit $\alpha_0 = 1/137.0359895$. Die Verwendung dieser Näherung ist durch die für die Bestimmung des experimentellen Moments nötige Integration gerechtfertigt. Im Falle des c-Quarks werden die beiden Resonanzen J/Ψ und Ψ' ausgewertet. Für beide Resonanzen wurde $\alpha(3\,\text{GeV}) = 1.02265\,\alpha_0$ verwendet, die weiteren in (3.14) benötigten Parameter sind in Tab. 3.2 angegeben und wurden [1] entnommen. Hier wird die Zerfallsbreite in ein Elektron-Positron-Paar aufgrund der Symmetrie zwischen Zerfall und Produktion betrachtet, da angenommen wird, dass das Quarkonium im Experiment nachgewiesen wird und ein Zerfall in leichte Hadronen aufgrund der langen Lebensdauer praktisch nicht stattfindet.

	Resonanz	M_R/MeV	Γ/keV
c-Quark	J/ψ	3096.916(11)	5.40(17)
	$\psi(2S)$	3686.093(34)	2.10(12)
b-Quark	$\Upsilon(1S)$	9460.30(26)	1.314(29)
	$\Upsilon(2S)$	10023.26(31)	0.587(25)
	$\Upsilon(3S)$	10355.2(5)	0.443(8)
	$\Upsilon(4S)$	10580(3.5)	0.248(31)
	$\Upsilon(5S)$	10865(8)	0.31(7)
	$\Upsilon(6S)$	11019(8)	0.130(30).

Tabelle 3.2: Massen und Zerfallsbreiten der Resonanzen aus [1]

In der Schwellen-Region des c-Quarks zwischen 3.73 GeV und 4.80 GeV existieren gute experimentelle Daten, die von der Produktion von leichten Quarks bereinigt werden müssen. Hier wird die bisher präziseste Messung von $R(s)$ in diesem Bereich aus [16] verwendet (vgl. Abb.3.4). Möglich ist die Ermittlung dieses Wirkungsquerschnitts z.B. über die Extrapolation der masselosen Näherung mit $n_f = 3$ in den Schwellenbereich hinein. Alternativ dazu kann der experimentelle Verlauf unterhalb der Schwelle zwischen 2.0 GeV und 3.7 GeV gemittelt werden und in Abhängigkeit vom Fehler der Daten ein linearer Verlauf in die Schwellenregion extrapoliert werden. Beide Verfahren führen im Endeffekt zum selben Ergebnis für die Masse, der erhaltene Fehler der zweiten Methode ist aber mit der experimentellen Unsicherheit stärker korreliert. Aus diesem Grund wird eine Kombination der beiden Methoden verwendet: aus der theoretischen Vorhersage des Wirkungsquerschnitts für die leichten Quarks und dem besten linearen Fit an die experimentellen Daten unterhalb der Schwelle wird für jeden Punkt $\sqrt{s}$ ein Mittelwert gebildet, der dann von den Daten in der Schwellenregion abgezogen wird und man erhält $R(s)$ für reine c-Quarkpaar-Produktion. Mit Hilfe der üblichen trapezoidalen Integration wurde diese Differenz nach (3.5) integriert und Tab. 3.3 gibt die so erhaltenen Beiträge zum experimentellen Moment wieder.

Der Fehler des Kontinuum-Anteils ergibt sich dabei aus der Variation des Moments mit der Variation der Polmassen und der Kopplungskonstante aus (3.13). In Abb. 3.4 ist die aus diesen Parametern resultierende Unsicherheit von $R(s)$ ebenfalls eingezeichnet.

Im Resonanzbereich erhält man den Fehler des Moments aus den Unsicherheiten der Massen und den Zerfallsbreiten aus Tab. 3.2. Vernachlässigbar sind Abweichungen durch die ungenaue Kenntnis der Feinstrukturkonstante bei $\sqrt{s} = 3\,\text{GeV}$.

In der Schwellenregion erhält man den Fehler aus der Variation des Fits an die experimentellen Daten unterhalb der Schwellenregion (siehe Abb. 3.4) und dem in die Subtraktion einfließenden mittleren experimentellen Fehler von ca. 4 %.

Insgesamt bekommt man für das erste experimentelle Moment des c-Quarks

$$\mathcal{M}_{1,c}^{\text{exp}} = 0.2087 \pm 0.0042, \tag{3.15}$$

wobei sich der Gesamtfehler aus quadratischer Addition der einzelnen Fehler ergibt.
Ein Vergleich mit dem Wert $\mathcal{M}_{1,c}^{\text{exp}} = 0.2065 \pm 0.0084$ aus [66] zeigt, dass die neuen Daten für J/Ψ und Ψ' zu einer Reduktion des Fehlers um die Hälfte und zu einer leichten Verschiebung des Mittelwerts führen.

Für das b-Quark wird das experimentelle Moment im Folgenden in der gleichen Weise wie für das c-Quark ermittelt.
Die Beiträge zum experimentellen Moment aus der Kontinuum-Region um die Schwelle der b-Produktion herum werden analog zum c-Quark behandelt. Oberhalb der Schwelle ($p^2 > 11.2\,\text{GeV}$) wird wieder aufgrund der nur lückenhaft vorhandenen experimentellen Daten die pQCD-Vorhersage mit voller Massenabhängigkeit bis $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ inklusive aller sekundären Beiträge und Massenkorrekturen in $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ für bottom-Produktion verwendet.
Wiederum in narrow-width-approximation genähert werden die Resonanzen $\Upsilon(1S)$-$\Upsilon(6S)$. Für alle Resonanzen wurde die Feinstrukturkonstante $\alpha(10\,\text{GeV}) = 1.03695\,\alpha_0$ angenommen.
Im Gegensatz zur charm-Schwellenregion ist die bottom-Schwellenregion zwischen 10.6 GeV bis 11.075 GeV von den Resonanzen $\Upsilon(4S)$-$\Upsilon(6S)$ dominiert, die in diesem Bereich als einziger Beitrag zum experimentellen Moment angenommen werden. Oberhalb dieser Region wird $R(s)$ nach [73] mit einem linearen Anstieg von Null bis hin zur pQCD-Vorhersage bei 11.2 GeV genähert.
Die einzelnen Beiträge der Momente sind ebenfalls in Tab. 3.3 aufgelistet und man erhält für das erste experimentelle Moment

$$\mathcal{M}_{1,b}^{\text{exp}} = (4.456 \pm 0.121)\,10^{-3}. \tag{3.16}$$

Der Fehler ergibt sich in der Kontinuum- und Resonanzregion wiederum aus der Variation der Masse mit der Variation der Eingabeparametern. Die sehr einfach approximierte Schwellenregion trägt nur schwach zum gesamten experimentellen Moment bei. Deswegen wird dieser Anteil als maximal fehlerbehaftet angesehen.

i	$\mathcal{M}_{1,i}^{\text{exp,res}} \times 10^2$	$\mathcal{M}_{1,i}^{\text{exp,thr}} \times 10^2$	$\mathcal{M}_{1,i}^{\text{exp,cont}} \times 10^2$	$\mathcal{M}_{1,i}^{\text{exp}} \times 10^2$
c-Quark	11.36(38)	3.13(15)	6.38(10)	20.87(42)
b-Quark	0.1580(114)	0.00035(35)	0.2913(21)	0.4456(121)

Tabelle 3.3: Erstes experimentelles Moment für charm- und bottom-Produktion, aufgespalten in die Beiträge aus Resonanz-, Schwellen- und Kontinuum-Region

Quark-Massen

Setzt man nun in das erste theoretische Moment Gl. (3.8)-(3.12) die Ladung des c-Quarks ($Q_c = 2/3$), die Anzahl der aktiven Flavours ($n_f = 3$) und die numerischen Werte für die Casimir-Operatoren der $SU(3)$-Gruppe ein, so erhält man unter Berücksichtigung der theoretischen Momente bis $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ aus Kap. 2.3 für das zur charm-Produktion gehörende erste theoretische

Moment

$$\begin{aligned}\overline{C}_1^c &= 1.06667 + a\left(2.55473 + 2.13333\log\left(m_c^2(\mu)/\mu^2\right)\right)\\ &+ a^2\left(2.49671 + 3.31303\log\left(m_c^2(\mu)/\mu^2\right) - 0.0888889\log^2\left(m_c^2(\mu)/\mu^2\right)\right)\\ &+ a^3\left(-5.64043 + 4.06687\log\left(m_c^2(\mu)/\mu^2\right) + 0.959031\log^2\left(m_c^2(\mu)/\mu^2\right)\right.\\ &\left.\qquad + 0.0641975\log^3\left(m_c^2(\mu)/\mu^2\right)\right). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Zunächst wird nun $m_c(\mu_0 = 3\,\text{GeV})$ aus diesen beiden Momenten und Gl. (3.6) berechnet. Da das theoretische Moment logarithmisch von der Masse abhängt, ist die Bestimmungsgleichung somit nur numerisch lösbar. Am Einfachsten wird dies mit `FindRoot` in `Mathematica` durchgeführt, das im Prinzip ein verbessertes Newton-Verfahren zur numerischen Lösung verwendet. Anschließend wird, ausgehend von dem so bestimmten $m_c(\mu_0)$, mit Hilfe von `RunDec` das Laufen der Masse berechnet, um $m_c(m_c)$ zu erhalten.
Insgesamt erhält man für die charm-Masse

$$\begin{aligned} m_c(3\,\text{GeV}) &= 1.015 \pm 0.010_{\alpha_s} \pm 0.0003_{\mu} \pm 0.013_{\text{exp}}\,\text{GeV}\\ m_c(m_c) &= 1.295 \pm 0.009_{\alpha_s} \pm 0.0003_{\mu} \pm 0.012_{\text{exp}}\,\text{GeV}. \end{aligned}$$

Die Indizes geben dabei die Anteile der Fehler an, die aus der Unsicherheit der Kopplungskonstante α_s, der Skalenabhängigkeit des theoretischen Moments und des schon bekannten Fehlers des experimentellen Moments (3.15) herrühren. Alle diese Beiträge ergeben sich durch Variation der Masse mit der Variation der einzelnen Parameter.

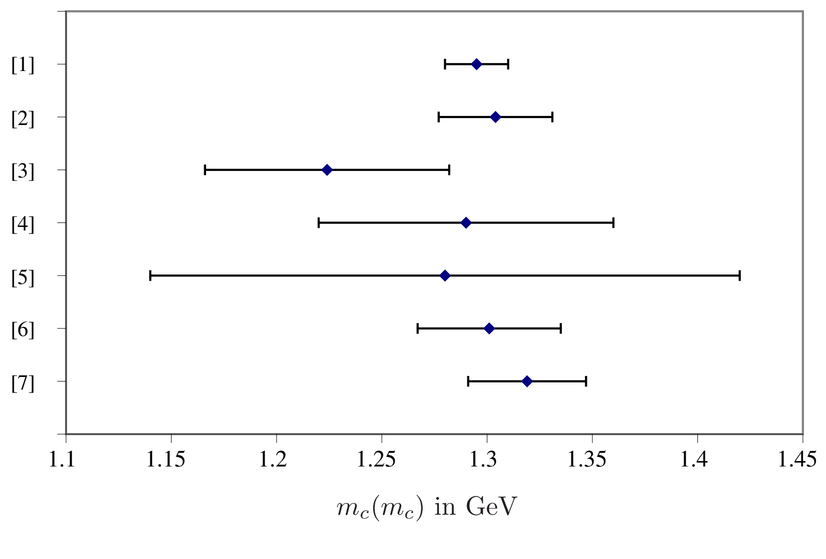


Abbildung 3.5: Vergleich der erhaltenen Werte für die c-Masse mit anderer Literatur; [1]: diese Arbeit – [2]: [66] – [3]: Analyse von B-Zerfällen [74], [4]: sum-rules aus höheren Momenten [60] – [5], [6], [7]: Lattice QCD [75, 76, 77]

Für die Kopplungskonstante und ihren Fehler bei $\mu = 3\,\text{GeV}$ erhält man $\alpha_s(3\,\text{GeV}) = 0.254 \pm 0.015$ aus dem Laufen von $\alpha_s(M_Z)$ aus Gl. (3.13). Die Skala wird in dem Bereich $3 \pm 1\,\text{GeV}$ variiert. Bei dieser Variation ist zu beachten, dass die Kopplungskonstante festgehalten wird.

Außerdem muss zur Fehlerabschätzung die zu einem bestimmten μ ermittelte Masse über RG-Gleichungen wieder auf $\mu_0 = 3\,\text{GeV}$ abgebildet werden. Die Fehler der skaleninvarianten Masse $m_c(m_c)$ ergeben sich dann aus dem Laufen der mit den einzelnen Unsicherheiten variierten Masse bei $\mu_0 = 3\,\text{GeV}$.

Ein Vergleich mit [66] zeigt, dass der gesamte Fehler um etwa die Hälfte reduziert werden konnte, was vor Allem auf die genaueren experimentellen Daten zurückzuführen ist. Der perturbative Fehler, der sich aus der Skalenvariation ergibt, konnte um ein Drittel reduziert werden, sodass eine genauere theoretische Analyse im Rahmen der Genauigkeit der anderen Parameter in nächster Zukunft nicht benötigt wird.

In Abb. 3.5 wird der hier erhaltene Wert für die charm-Masse mit anderen jüngeren Arbeiten verglichen und es zeigt sich eine hervorragende Übereinstimmung im Rahmen der jeweiligen Fehler.

Das theoretische Moment für das b-Quark mit $Q_b = -1/3$ und $n_f = 4$ schreibt sich

$$\begin{aligned}
\overline{C}_1^{\text{b}} &= 1.06667 + a\left(2.55473 + 2.13333\log(m_b^2(\mu)/\mu^2)\right) \\
&+ a^2\left(3.15899 + 3.44252\log(m_b^2(\mu)/\mu^2) + 0.0888889\log^2(m_b^2(\mu)/\mu^2)\right) \\
&+ a^3\left(-7.76244 - 0.0599254\log(m_b^2(\mu)/\mu^2) + 1.58509\log^2(m_b^2(\mu)/\mu^2)\right. \\
&\qquad \left. -0.054321\log^3(m_b^2(\mu)/\mu^2)\right). \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Zunächst wird die bottom-Masse bei $\mu = 10\,\text{GeV}$ ausgewertet, dann wiederum das Laufen der Masse bis zum Wert $\mu = m_b$ berechnet. Die Fehler aus der Kopplungskonstante ($\alpha_s(10\,\text{GeV}) = 0.178 \pm 0.014$) und dem Experiment ergeben sich dabei analog zum c-Quark, die theoretische Unsicherheit ergibt sich aus Variation der Skala im Bereich $10 \pm 5\,\text{GeV}$.

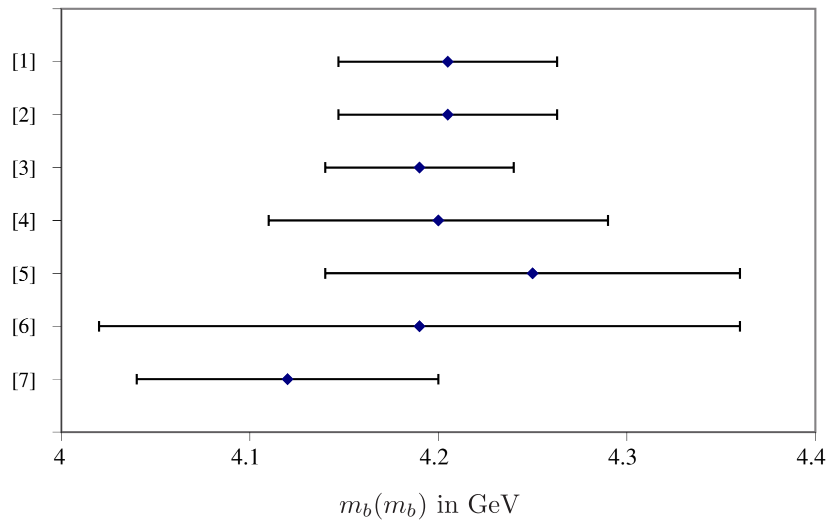


Abbildung 3.6: Vergleich der erhaltenen Werte für die b-Masse mit anderer Literatur: [1]: diese Arbeit – [2]: [66] – [3],[4]: sum-rules aus höheren Momenten [78, 79] – [5], [6], [7]: Lattice QCD [80, 81, 82]

Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned} m_b(10\,\text{GeV}) &= 3.665 \pm 0.010_{\alpha_s} \pm 0.003_{\mu} \pm 0.058_{\text{exp}}\,\text{GeV}, \\ m_b(m_b) &= 4.205 \pm 0.010_{\alpha_s} \pm 0.002_{\mu} \pm 0.057_{\text{exp}}\,\text{GeV}. \end{aligned}$$

Diese Werte stimmen exakt mit [66] überein, der Einfluss des Fehlers aus dem theoretischen Moment ist jedoch um nahezu eine Größenordnung reduziert. In der Literatur wird seit einiger Zeit die Auswertung der experimentellen Daten in [1] aus der Resonanzregion um die $\Upsilon(4S)$ und $\Upsilon(5S)$ diskutiert und andere Werte für die Masse und Zerfallsbreite der Resonanzen angegeben [79]. Verwendet man diese Daten zur Ermittlung des Moments in dieser Region, so erhält man eine Verschiebung des Mittelwerts der b-Masse um einige MeV, was konsistent mit unserer Fehlerabschätzung ist. Abb. 3.6 zeigt wiederum einen Vergleich mit anderer Literatur.
Mit der in diesem Kapitel durchgeführten Berechnung des ersten theoretischen Moments konnte der Anteil der theoretischen Unsicherheit in der oben beschriebenen Analyse der Quarkmassen stark reduziert werden. Mit Blick auf die derzeitige experimentelle Genauigkeit würde eine Berechnung in noch höherer Ordnung zu keiner weiteren Verbesserung der aus dieser Methode erhaltenen Massen führen.

4 Das Laufen der Feinstrukturkonstante

4.1 Motivation

Eine der wichtigsten Parameter für präzise theoretische Vorhersagen von elektroschwachen Observablen im Standardmodell stellt das Laufen der effektiven elektromagnetischen Kopplung ausgehend vom Thompson-Limit bis zur Z^0-Skala dar. Im Vergleich zu anderen Parametern des elektroschwachen Sektors wie G_F oder M_Z, ist die Feinstrukturkonstante $\alpha(\mu^2 = M_Z^2)$ mit einer um Größenordnungen geringeren Präzision bekannt [27]. Die Unsicherheit von $\alpha(M_Z^2)$ hat deshalb z.B. einen großen direkten Einfluss auf die Bestimmung des effektiven schwachen Mischungswinkels $\sin^2\theta^l_{\text{eff}}$ [83] und somit auf die indirekte Ermittlung der oberen Grenze der Higgs-Masse. Begrenzt wird die Genauigkeit aufgrund der Beeinflussung des Laufens der Feinstrukturkonstante durch die Produktion von Hadronen, deren nichtperturbativer Charakter theoretisch nur unzureichend beschrieben werden kann. Der hadronische Wirkungsquerschnitt $R(s)$ mit dem entsprechenden experimentellen Fehler ist somit über eine Dispersionsrelation der essentielle Eingabeparameter, seine experimentelle Unsicherheit hat eine direkt limitierende Wirkung auf die erreichbare Genauigkeit von $\alpha(M_Z^2)$. In der Tat ist zwar die Feinstrukturkonstante $\alpha(0)$ für verschwindende Energien mit einer sehr hohen Genauigkeit bekannt ($\Delta\alpha(0)/\alpha(0) \approx 3.6\ 10^{-9}$), der große Fehler des hadronischen Anteils ergibt jedoch einen Verlust von fünf Größenordnungen in der Präzision bei der Berechnung von $\alpha(M_Z^2)$ auf $\Delta\alpha(M_Z^2)/\alpha(M_Z^2) \approx 1.7 - 6.8\ 10^{-4}$. Ein Linearbeschleuniger der nächsten Generation wird eine um ca. eine Größenordnung verbesserte relative Genauigkeit von $\Delta\alpha(M_Z^2)/\alpha(M_Z^2) \approx 5.3\ 10^{-5}$ nötig machen [27].

Bisherige Analysen zur Bestimmung der Feinstrukturkonstante $\alpha(M_Z^2)$ basieren vor Allem auf der semitheoretischen Analyse des experimentellen Wirkungsquerschnitts $R(s)$ analog zu der Ermittlung der experimentellen Momente im Falle der Quarkmassen. Der große Nachteil dieser Methode ist die starke Abhängigkeit vom experimentellen Fehler. So wurde eine solche Auswertung in [73] mit der massiven Drei-Schleifen-Vakuumpolarisation und den anderen in Kap. 3.4 diskutierten Beiträgen in den einzelnen kinematischen Regionen von $R(s)$ durchgeführt. Eine signifikante Verbesserung des dort erhaltenen Fehlers lässt sich aber mit diesem Verfahren aus weiteren, rein störungstheoretischen Betrachtungen nicht erreichen.
Einen alternativen Zugang stellt die sog. Adler-Funktion dar, die den beitragenden experimentellen Fehler im Vergleich zur Skalenabhängigkeit der pQCD beträchtlich reduziert. Genauere störungstheoretische Berechnungen der Vakuumpolarisation können so die Unsicherheit von $\alpha(M_Z^2)$ drastisch reduzieren.

Gegenstand des vorliegenden Kapitels ist die Diskussion des hadronischen Anteils am Laufen der Feinstrukturkonstante. Dabei wird vor Allem auf den Zugang über die Adler-Funktion eingegangen und quantitativ dargestellt, dass die Berechnung der Vier-Schleifen-Vakuumpolarisation mit diesem Verfahren zu einer signifikanten Reduktion der Unsicherheit von $\alpha(M_Z^2)$ führt. Eine volle Berechnung auf diesem Niveau stellt eine große Herausforderung dar und sprengt den Rahmen dieser Arbeit, deshalb wird im Folgenden der Weg zur Bewältigung dieser Berechnung beschrieben und erste, in der Literatur noch nicht bekannte Zwischenergebnisse angegeben.

4.2 Skalenabhängigkeit von α

Die effektive Feinstrukturkonstante $\alpha(\mu)$ ergibt sich direkt aus der Vakuumpolarisation,

$$\alpha(\mu) = \frac{\alpha_0}{1 - (\Pi'(0) - \Pi'(\mu))} = \frac{\alpha_0}{1 - \Delta\alpha_{\text{lep}}(\mu) - \Delta\alpha^{(5)}_{\text{had}}(\mu)}, \tag{4.1}$$

mit der Feinstrukturkonstante $\alpha_0 = 1/137.0359895$ im Thompson-Limit und den Beiträgen $\Delta\alpha_i(\mu)$ zur Vakuumpolarisation. Der Wert von $\Delta\alpha_{\text{lep}}$ ist bis $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ bekannt [84]. Da es sich hierbei um reine QED-Prozesse handelt, entspricht die Unsicherheit $\Delta\alpha_{\text{lep}}(M_Z)/\alpha_{\text{lep}}(M_Z) = 10^{-6}$ dem reinen theoretischen Fehler, der sich aus der Skalenvariation ergibt, und ist deshalb in dieser Ordnung bereits vergleichsweise klein und vernachlässigbar.
Die Auswertung des Beitrags $\Delta\alpha^{(5)}_{\text{had}}(M_Z)$ kann aufgrund der Hadronisierungsvorgänge nicht aus einer rein theoretischen Vorhersage erhalten werden und eine Kombination von experimentellen Daten und Berechnungen ist nötig. Dazu lässt sich ebenfalls eine Dispersionsrelation aufstellen,

$$\Delta\alpha^{(5)}_{\text{had}}(M_Z) = -\frac{\alpha_0}{3\pi} M_Z^2 Re \int_{4m_\pi^2}^{\infty} ds \frac{R(s)}{s(s - M_Z^2)}, \tag{4.2}$$

mit deren Hilfe die Analyse über experimentelle Daten geschehen kann. $R(s)$ wird dabei analog zu der in dieser Arbeit diskutierten Ermittlung der Quark-Massen in den Kontinuum-Regionen mit pQCD-Vorhersagen genähert, experimentelle Daten werden für die Schwellen-Bereiche und Resonanzen verwendet. Dieser Ansatz wurde in [27] verfolgt mit dem Ergebnis

$$\Delta\alpha^{(5)}_{\text{had}}(-M_Z^2) = (276.90 \pm 3.53)\, 10^{-4}, \tag{4.3}$$

wobei für das Kontinuum die in Kap. 3.4 diskutierten pQCD-Beiträge verwendet wurden. Der Großteil des Fehlers resultiert hier wiederum aus der experimentellen Unsicherheit und eine genauere Kenntnis des pQCD-Anteils liefert bei dieser semitheoretischen Methode bei Weitem nicht die gewünschte Genauigkeit.
Über einen Umweg lässt sich aber der Beitrag der Messunsicherheit von $R(s)$ zu $\Delta\alpha^{(5)}_{\text{had}}(\mu)$ reduzieren und so der Einfluss der Anwendbarkeit der pQCD besser kontrollieren. Dazu definiert man die Adler-Funktion

$$D(-s) = -12\pi^2 s \frac{d\Pi'(s)}{ds} = \frac{3\pi}{\alpha_0} s \frac{d}{ds} \Delta\alpha^{(5)}_{\text{had}}(s), \tag{4.4}$$

die mit $R(s)$ eine Dispersionsrelation der Form

$$D(Q^2) = Q^2 \int_{4m_\pi^2}^{\infty} ds \frac{R(s)}{(s + Q^2)^2} \tag{4.5}$$

erfüllt. Diese Funktion ist glatt im Euklidischen und kann sehr einfach aus der pQCD-Vakuumpolarisaion und den experimentellen Daten berechnet werden. Abb. 4.1 zeigt einen Plot der Adlerfunktion aus den bis heute bekannten theoretischen Vorhersagen und dem gemessenen $R(s)$. Man erkennt, dass $D(Q^2)$ unterhalb von $Q_0^2 = -2.5\,\text{GeV}$ sehr gut durch pQCD beschrieben wird, nur oberhalb dieses Punktes müssen experimentelle Daten zugezogen werden.
Mit Hilfe der Umkehrung von (4.4),

$$\Delta\alpha^{(5)}_{\text{had}}(-Q^2) \propto \frac{\alpha_0}{3\pi} \int \frac{D(s)}{s}, \tag{4.6}$$

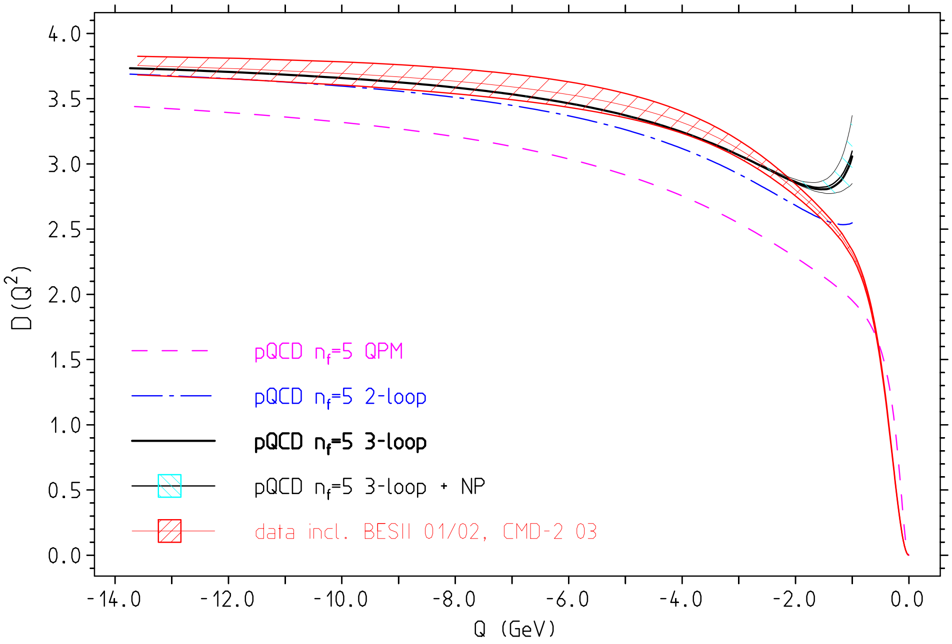


Abbildung 4.1: Adlerfunktion, theoretisch und aus experimentellen Daten

ergibt sich $\Delta\alpha_{\rm had}^{(5)}(-M_Z)$ nun aus

$$\Delta\alpha_{\rm had}^{(5)}(-M_Z^2) = \left(\Delta\alpha_{\rm had}^{(5)}(-M_Z^2) - \Delta\alpha_{\rm had}^{(5)}(-Q_0^2)\right)_{\rm pQCD} + \Delta\alpha_{\rm had}^{(5)}(-Q_0^2)_{\rm data}\,, \tag{4.7}$$

wobei die Indizes angeben, ob sich die Adlerfunktion im Integranden aus der pQCD oder experimentellen Daten ergibt.
Angewendet wurde diese Methode ebenfalls in [27], um aus der bis dahin bekannten Drei-Schleifen-Vakuumpolarisation den hadronischen Beitrag zum Laufen der Feinstrukturkonstante zu erhalten:

$$\Delta\alpha_{\rm had}^{(5)}(-M_Z^2) = (276.13 \pm 0.86 \pm 1.49)\,10^{-4} \tag{4.8}$$

Die Werte aus Gl. (4.3) und (4.8) stimmen gut überein, es zeigt sich jedoch, dass gegenüber dem üblichen, der Auswertung der Quarkmassen entsprechendem Vorgehen, der Einfluss der Messunsicherheit von $R(s)$ drastisch reduziert werden kann und so ein größerer Vorteil aus genaueren Berechnungen gezogen werden kann. In Abb. 4.2 ist ein Vergleich der einzelnen Beiträge zum Gesamtfehler aus den beiden Methoden dargestellt.
Obige Ausführung zeigt, dass die im vorigen Kapitel motivierte Forderung nach einer genaueren Kenntnis der Feinstrukturkonstante auf der Z^0-Skala mit einer Ermittlung des Photon-Stromkorrelators auf dem Vier-Schleifen-Niveau erfüllt werden kann, solange der Ansatz mit der Adler-Funktion verfolgt wird. Tatsächlich zeigt diese Abschätzung, dass so der Fehler beim Übergang von $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ zu $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ um ca. 50 % reduziert werden kann. Dafür muss die Vakuumpolarisation wegen (4.6) aber für alle p^2 bekannt sein und die schon recht aufwendige Berechnung des ersten Moments in dieser Ordnung in Kap. 3.3 reicht selbstverständlich bei Weitem nicht aus. Hinzu kommt, dass eine analytische Lösung bereits in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ bisher nicht bekannt ist, in

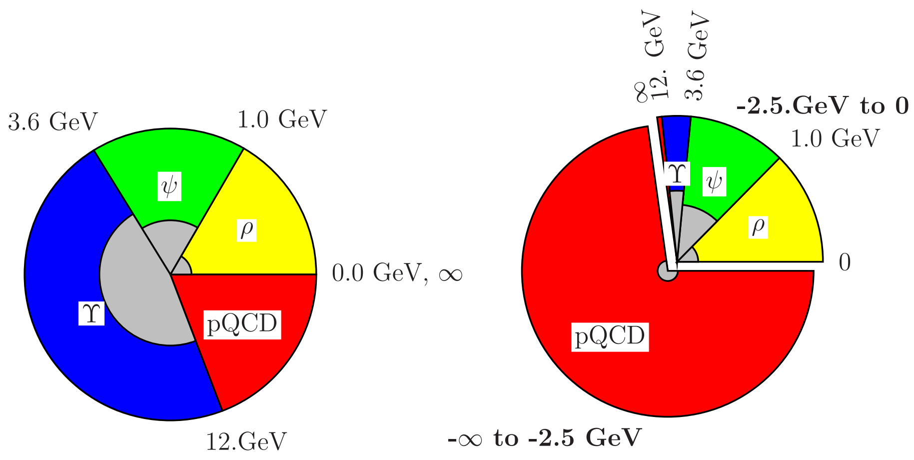


Abbildung 4.2: Verteilung der Beiträge zu dem Gesamtfehler von $\Delta\alpha^{(5)}_{\mathrm{had}}(-M_Z)$. Links: übliche Methode, rechts: Methode basierend auf der Adlerfunktion.

höheren Ordnungen ist also mit einem analytischen Ergebnis ebenfalls nicht zu rechnen. So handelt es sich bei dem schon mehrfach zitierten Ergebnis [34] für die Vakuumpolarisation mit voller Massenabhängigkeit auf dem Drei-Schleifen-Niveau um eine sehr gute Näherung. Im Folgenden soll das Prinzip dieser Approximation aufgrund seiner Relevanz für die Berechnung in höheren Ordnungen gezeigt werden.
Auf dem Drei-Schleifen-Niveau ist die Methode, alle Diagramme in eine Taylorreihe um $p^2 = 0$ zu entwickeln und danach auf Masterintegrale zu reduzieren, mit vertretbarem Zeitaufwand bis zu relativ hohen Ordnungen in der Entwicklungsvariablen p^2 anwendbar. Mit diesem Verfahren gelang es in [34] acht Koeffizienten der Reihe analytisch auszuwerten und somit im Limit $p^2 \to 0$ eine gute Näherung für die Vakuumpolarisation zu erhalten. Zusammen mit dem Verhalten in zwei anderen kritischen Energiebereichen, dem Schwellenbereich $p^2 \to 4m^2$ und dem masselosen Limit $p^2 \to -\infty$, lässt sich nun eine Approximation für den gesamten Energiebereich gewinnen. Erstere ergibt sich aus nicht-relativistischen Betrachtungen für Greens-Funktionen unter Anwesenheit eines Coulomb-Potentials, letztere wurde bereits in Kap. 3.4 erwähnt und ist schon länger bis $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ bekannt.
Um die Konvergenz der Näherung von $\Pi(p^2)$ zu verbessern, wird zunächst eine Funktion konstruiert, die an der Schwelle und im Hochenergiebereich frei von logarithmischen Singularitäten ist,

$$\tilde{\Pi}(p^2) = \Pi(p^2) + G(p^2). \tag{4.9}$$

$G(p^2)$ wird so gewählt, dass es für kleine p^2 polynomialen Charakter hat und in der Schwellen- und Hochenergieregion die in $\Pi(p^2)$ auftauchenden logarithmischen Divergenzen subtrahiert. Anschließend wird eine konforme Abbildung, eine Transformation der Form [85]

$$\omega = \frac{1-\sqrt{1-p^2/4m^2}}{1+\sqrt{1-p^2/4m^2}} \quad \leftrightarrow \quad \frac{p^2}{4m^2} = \frac{4\omega}{(1+\omega)^2} \tag{4.10}$$

angewendet, die die komplexe p^2-Ebene in das Innere des Einheitskreises abbildet. Dabei werden die Punkte $p^2 = 0$, $4m^2$ und $-\infty$ auf $\omega = 0$, 1 und -1 abgebildet, der obere und untere Teil des Schnitts für $p^2 > 4m^2$ wird auf den oberen und unteren Halbkreis transformiert. Das Konvergenzverhalten verbessert sich wiederum, da die Entwicklung der Vakuumpolarisation in ω zu einer alternierenden Reihe wird und die folgende Padé-Approximation hervorragend für solche Reihen geeignet ist.

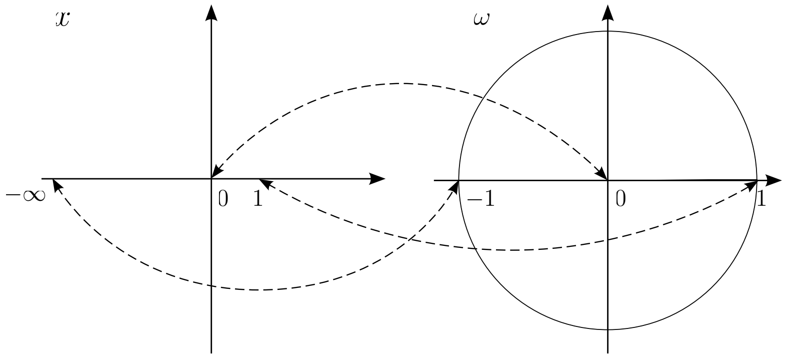


Abbildung 4.3: Konforme Abbildung.

Im letzten Schritt wird nun eine Padé-Approximation in der Variablen ω durchgeführt. Dazu definiert man die Funktion

$$P(\omega) = \frac{1-\omega}{(1+\omega)^2}\left(\tilde{\Pi}(q^2) - \tilde{\Pi}(-\infty)\right), \tag{4.11}$$

wobei der Vorfaktor $(1-\omega)/(1+\omega)^2$ dafür sorgt, dass die noch immer vorhandene Schwellendivergenz im Grenzwert $\omega \to 1$ regularisiert wird. Bei der Padé-Approximation $\mathcal{P}_{(n,m)}$ handelt es sich um eine rationale Funktion mit einem Polynom vom Grad n im Zähler und einem Polynom vom Grad m im Nenner,

$$\mathcal{P}_{(n,m)}(\omega) = \frac{a_0 + a_1\omega + \cdots + a_n\omega^n}{1 + b_1\omega + \cdots + b_m\omega^m} \tag{4.12}$$

Der Vorteil der Näherung über eine solche Funktion im Vergleich zur Taylorreihe liegt darin, dass auch Pol-Strukturen in dem Approximanten berücksichtigt werden können und eine Konvergenz für alternierende Reihen sehr rasch erreicht wird.

Mit der Kenntnis der Taylorreihe von $\Pi(p^2)$ in x bis zum Grad k ist $P(\omega)$ an insgesamt $k+2$ Punkten bekannt:

$$\{P(-1), P(0), P'(0), \ldots, P^{(k)}(0), P(1)\}. \tag{4.13}$$

Damit lässt sich eine Padé-Approximation für $P(\omega)$ mit $n+m = k+2$ finden, indem man das Gleichungssystem $P(\omega) = \mathcal{P}_{(n,m)}(\omega)$ löst.

Die Polarisationsfunktion erhält man nun, indem man Gl. (4.11) mit dem approximierten $P(\omega)$ und Gl. (4.9) nach $\Pi(q^2)$ auflöst. Daraus wiederum ergibt sich über die Adlerfunktion der hadronische Anteil des Laufens der Feinstrukturkonstante $\Delta\alpha^{(5)}_{\mathrm{had}}$.

4.3 Methode der Differentialgleichungen

Aus den Betrachtungen des letzten Kapitels wird deutlich, dass zur Berechnung von $\Delta\alpha^{(5)}_{\mathrm{had}}$ aus der Adlerfunktion mit einer höheren Präzision vor Allem die Entwicklung der Vakuumpolarisation auf dem Vier-Schleifen-Niveau für kleine p^2 die große Unbekannte darstellt. Eine direkte

Taylorreihenentwicklung der Feynmandiagramme wie in Kap. 3.3 ist hierfür jedoch nicht geeignet. Bereits zur Ermittlung des zweiten Moments, also des zweiten Koeffizienten in dieser Reihe, tragen mehr als eine Million Integrale bei. Selbst auf einem Computer Cluster würde diese Berechnung Monate dauern, an höhere Momente ist mit dieser Methode gar nicht zu denken.
Eine Alternative zur Taylorreihenentwicklung der Diagramme aus der Vakuumpolarisation und der anschließenden Reduktion der resultierenden Vakuumdiagramme auf Masterintegrale stellt die direkte Reduktion der Diagramme dar. Im Vergleich zu der Reduktion von Vakuumintegralen besitzen diese Diagramme im Allgemeinen mehr interne Linien und mit der Masse des schweren Teilchens sowie dem einlaufenden Impuls existieren zwei Skalen. Es ist also eine relativ lange Laufzeit der Reduktion zu erwarten - erste Tests zeigen, dass mit einem Zeitraum von einigen Monaten zu rechnen ist. Das Resultat dieser Rechnung ist allerdings die volle x-Abhängigkeit der Diagramme von den resultierenden Masterintegralen und stellt somit einen großen Vorteil gegenüber der ursprünglichen Methode dar. Aufgrund der Abhängigkeit dieser Diagramme von einem einzigen externen Impuls werden diese im Folgenden als Propagatoren bezeichnet.
Problematisch ist jedoch, dass es sich bei den Masterintegralen nicht mehr um wenige, relativ einfache Vakuum-Integrale handelt, für die einige Techniken zur Berechnung existieren. Stattdessen tauchen auf dem Vier-Schleifen-Niveau 577 propagatorartige Masterintegrale auf. Die Berechnung von Propagatoren ist ein schwieriges Unterfangen, da diese eine komplexe funktionale Abhängigkeit von p^2 besitzen.
Der Schlüssel zur Lösung dieses Problems liegt in der Untersuchung des Skalierungsverhaltens der Masterintegrale. Ein skalarer Propagator in $\mathcal{O}(\alpha_s^n)$ kann in seiner allgemeinsten Form im D-dimensionalen euklidischen Impulsraum geschrieben werden als

$$I(p^2, m^2, X) = \int d^D k_1 \dots d^D k_n \frac{\Pi_{i=1}^n (p \cdot k_i)^{\rho_i} \Pi_{i=1}^n \Pi_{j=1}^n (k_i \cdot k_j)^{\mu_{ij}}}{\Pi_{i=1}^{N_d} (q_i^2 + m_i^2)^{\gamma_i}}, \tag{4.14}$$

mit den internen Impulsen k_i, dem externen Impuls p, den Linearkombinationen q_i aus $\{p, k_i\}$, den in X zusammengefassten Exponenten ρ_i, μ_{ij} und γ_i sowie der Anzahl N_d der internen Linien. Dieser Propagator erfüllt die Skalierungseigenschaft

$$I(\lambda p^2, \lambda m^2, X) = \lambda^{\dim[I(p^2,m^2,X]} I(p^2, m^2, X) \tag{4.15}$$

mit

$$\dim[I(p^2, m^2, X)] = \frac{D}{2} n + \sum_{i=1}^{n} (\rho_i - \gamma_i) + \sum_{i,j=1}^{n} \mu_{ij} \tag{4.16}$$

Differenziert man nun nach λ an der Stelle $\lambda = 1$, erhält man die Differentialgleichung

$$p^2 \frac{\partial}{\partial p^2} I(p^2, m^2, X) = \dim[I(p^2, m^2, X)] I(p^2, m^2, X) - m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} I(p^2, m^2, X), \tag{4.17}$$

mit der die Lösung für einen gegebenen Propagator, ausgehend von dem Vakuum-Integral bei $p^2 = 0$ als Randbedingung, gefunden werden kann. Durch Einsetzen eines Masterintegrals in diese Gleichung, Durchführung der Differentiation nach m^2 und Beachtung der aus der Reduktion bekannten Relationen erhält man auf der rechten Seite wiederum eine Linearkombination aus Masterintegralen. Im Allgemeinen ergibt sich so ein System einer großen Anzahl von gekoppelten Differentialgleichungen.
Allerdings ist aufgrund des Reduktionsverfahrens eine systematische Lösung möglich, da eine Kopplung nur innerhalb einzelner Klassen der Masterintegrale stattfinden kann. Der Grund hierfür liegt in der Anwendung der IBPs. Die Ableitung eines allgemeinen Propagators mit N_d internen Linien nach einem inneren Impuls k_i liefert wieder einen Propagator mit N_d Linien, dessen Topologie dem ursprünglichen Propagator entspricht, und zusätzlichen Termen im Zähler.

Lassen sich l quadratische Ergänzungen mit anschließendem Kürzen von Nennern durchführen, so hat man eine Relation zwischen einem Masterintegral mit N_d und Anderen mit $N_d - l$ Linien erhalten. Daraus folgt, dass die Reduktion nur Relationen zwischen Masterintegralen derselben Linienzahl und Topologie oder einer niedrigeren Linienanzahl liefert.
Insgesamt ergibt sich also ein trianguläres Differentialgleichungssystem, das sich ausgehend von dem Propagator mit der geringsten Linienzahl iterativ lösen lässt: Sei $\overline{M} = (M_1, M_2, \ldots, M_l)$ mit dem Vektor M_i der Masterintegrale mit i internen Linien und der maximalen internen Linienanzahl l im Problem. Dann lässt sich das Differentialgleichungssystem schreiben als

$$p^2 \frac{\partial}{\partial p^2} \overline{M} = \hat{A}\overline{M} \quad \text{mit} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ A_{21} & A_{22} & & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

Dabei sind die A_{ij} blockdiagonale Matrizen im durch M_j aufgespannten Raum.
Praktisch ist das analytische Lösen dieses mehrere hundert Masterintegrale umfassenden Systems nicht möglich. Zum Einen liegt das an der Größe, zum Anderen stellt jedes einzelne Masterintegral eine komplexe Funktion in p^2 dar, sodass ohne Kenntnis einer lösenden Funktionenklasse und deren Algebra bezüglich Differentiation eine Integration der Gleichungen aussichtslos ist.
Glücklicherweise sind wir nur an der Entwicklung der Vakuumpolarisation um einen Punkt, $p^2 = 0$, interessiert. Dies erlaubt es, für jedes Masterintegral einen Entwicklungsansatz der Form

$$M_{ij}(p^2, m^2) = M_{ij}^{(0)}(0, m^2) + M_{ij}^{(1)}(0, m^2)p^2 + M_{ij}^{(2)}(0, m^2)(p^2)^2 + \ldots . \tag{4.19}$$

zu machen. Die $M_{ij}^{(k)}(0, m^2)$ entsprechen hierbei in üblicher Weise Polynomen in ϵ.
Aus dem Differentialgleichungssystem (4.18) erhält man so ein zwar großes, aber iterativ leicht lösbares Gleichungssystem. Die Randbedingungen $M_{ij}^{(0)}(0, m^2)$ entsprechen den Vakuumdiagrammen, die sich aus den Masterintegralen durch Abschneiden der äußeren Linien ergeben. Diese sind jedoch aufgrund der zahlreichen Symmetrien von Vakuumintegralen nicht unabhängig voneinander. Hat man einen Satz von nötigen Randbedingungen in einem Problem gefunden, so bietet es sich deshalb an, eine Reduktion der Vakuum-Integrale durchzuführen und so die Anzahl der Unbekannten weiter zu reduzieren. Die resultierenden Vakuumdiagramme können, wie schon in Kap. 2.3 erwähnt, relativ einfach berechnet werden.
Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Programm (`SolveMaster`) basierend auf dem soeben dargelegten Verfahren implementiert, das es ermöglicht, Entwicklungen von Masterintegralen bis zu sehr hohen Ordnungen in x zu erhalten. Dabei handelt es sich um ein in `Mathematica` geschriebenes Programm, das als Eingabe eine Liste von Masterintegralen entgegen nimmt und dann über eine `FORM`-Prozedur die Differentialgleichungen erzeugt. Anschließend wird die Entwicklung in $x = p^2/4m^2$ und in ϵ vorgenommen und das so entstehende Gleichungssystem mit `Mathematica`-internen Mitteln gelöst. Zur Verbesserung der Effizienz wird durch Vorrausberechnung der maximal nötigen Ordnungen in den beiden Entwicklungsvariablen versucht, die Anzahl der zu lösenden Gleichungen so gering wie möglich zu halten. Außerdem werden Relationen zwischen den voneinander nicht unabhängigen Randbedingungen gesucht.

4.4 Taylorreihenentwicklungen in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ und $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$

Im Rahmen dieser Arbeit wurde die Methode der Differentialgleichungen mit `SolveMaster` im Hinblick auf eine zukünftige Ermittlung der massiven Vakuumpolarisation in $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ angewendet und getestet.

Vakuumpolarisation in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$

Im Mittelpunkt des Interesses stand dabei zunächst die Polarisationsfunktion des Photons bis $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$, deren Taylorreihenentwicklung in $z = p^2/4m^2$ mit dem Programmpaket `MATAD` ermittelt wurde und bis z^8 bekannt ist. Zur Reproduktion dieses Ergebnisses wurde deshalb die Berechnung der Vakuumpolarisation in Ein-, Zwei- und Drei-Schleifen-Ordnung durchgeführt. Alle insgesamt 47 resultierenden Masterintegrale wurden anschließend mit `SolveMaster` in z bis zu z^{30} entwickelt und die sich daraus ergebenden 7 Randbedingungen aus [41, 42] eingefügt (siehe Abb. 4.4). Die Eichunabhängigkeit der daraus ermittelten Polarisationsfunktion wurde explizit durch Beibehalten des Eichparameters ξ in der gesamten Rechnung getestet. Nach der Parameterrenormierung war nur eine konstante Subtraktion nötig, das Ergebnis also renormierbar. Zur besseren Übersicht ist das Endergebnis numerisch wider gegeben:

$$
\begin{aligned}
\Pi_{3L}^{\exp}(z) \;=\;& 1.0667\,z + 0.45714\,z^2 + 0.2709\,z^3 + 0.1847\,z^4 + 0.1364\,z^5 \\
&+0.10609\,z^6 + 0.085582\,z^7 + 0.070943\,z^8 + 0.060058\,z^9 + 0.051702\,z^{10} \\
&+0.045122\,z^{11} + 0.03983\,z^{12} + 0.035498\,z^{13} + 0.031899\,z^{14} + 0.02887\,z^{15} \\
&+0.026293\,z^{16} + 0.024077\,z^{17} + 0.022157\,z^{18} + 0.020478\,z^{19} + 0.019002\,z^{20} \\
&+0.017695\,z^{21} + 0.016531\,z^{22} + 0.01549\,z^{23} + 0.014553\,z^{24} + 0.013708\,z^{25} \\
&+0.012941\,z^{26} + 0.012243\,z^{27} + 0.011606\,z^{28} + 0.011022\,z^{29} + 0.010485\,z^{30} \\
+\;& a\,(2.5547\,z + 1.1096\,z^2 + 0.5194\,z^3 + 0.20312\,z^4 + 0.010627\,z^5 - 0.11584\,z^6 \\
&-0.2033\,z^7 - 0.26602\,z^8 - 0.31223\,z^9 - 0.34696\,z^{10} - 0.37346\,z^{11} - 0.3939\,z^{12} \\
&-0.40978\,z^{13} - 0.42217\,z^{14} - 0.43185\,z^{15} - 0.4394\,z^{16} - 0.44525\,z^{17} - 0.44973\,z^{18} \\
&-0.45311\,z^{19} - 0.45558\,z^{20} - 0.45731\,z^{21} - 0.45843\,z^{22} - 0.45904\,z^{23} - 0.45923\,z^{24} \\
&-0.45906\,z^{25} - 0.4586\,z^{26} - 0.45789\,z^{27} - 0.45697\,z^{28} - 0.45587\,z^{29} - 0.45463\,z^{30}) \\
+\;& a^2\,((0.50988 + 0.66228\,n_l)\,z + (1.4123 + 0.45492\,n_l)\,z^2 + (0.35223 + 0.42886\,n_l)\,z^3 \\
&+(0.47894 - 0.42483\,n_l)\,z^4 + (0.99431 - 0.42415\,n_l)\,z^5 + (1.2631 - 0.42338\,n_l)\,z^6 \\
&+(1.3517 - 0.42191\,n_l)\,z^7 + (1.309 - 0.41977\,n_l)\,z^8 + (1.1696 - 0.41711\,n_l)\,z^9 \\
&+(0.95837 - 0.41407\,n_l)\,z^{10} + (0.69291 - 0.41077\,n_l)\,z^{11} + (0.38626 - 0.40731\,n_l)\,z^{12} \\
&+(0.048047 - 0.40376\,n_l)\,z^{13} + (0.31445 + 0.40016\,n_l)\,z^{14} + (0.69567 + 0.39655\,n_l)\,z^{15} \\
&+(1.0913 + 0.39295\,n_l)\,z^{16} + (1.4981 + 0.38939\,n_l)\,z^{17} + (1.9133 + 0.38589\,n_l)\,z^{18} \\
&+(2.3348 + 0.38244\,n_l)\,z^{19} + (2.761 + 0.37905\,n_l)\,z^{20} + (3.1904 + 0.37573\,n_l)\,z^{21} \\
&+(3.6221 + 0.37249\,n_l)\,z^{22} + (4.0551 + 0.36932\,n_l)\,z^{23} + (4.4887 + 0.36622\,n_l)\,z^{24} \\
&+(4.9223 + 0.36319\,n_l)\,z^{25} + (5.3553 + 0.36024\,n_l)\,z^{26} + (5.7875 + 0.35735\,n_l)\,z^{27} \\
&+(6.2185 + 0.35454\,n_l)\,z^{28} + (6.6479 + 0.35179\,n_l)\,z^{29} + (7.0756 + 0.3491\,n_l)\,z^{30})
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

Die Entwicklungen der analytischen Ausdrücke (2.19) für die Polarisationsfunktion in Ein- und Zwei-Schleifenordnung stimmen mit diesem Ergebnis hervorragend überein. Ebenso stimmen die acht aus [34] bekannten Terme mit diesem Resultat überein. Das neue Ergebnis stellen hier die

Terme ab z^9 dar. Zu beachten ist, dass die Koeffizienten der Entwicklung voll analytisch bekannt sind. Einen Eindruck der Struktur dieser Ausdrücke kann man aus Gl. (4.21) gewinnen, die dem Koeffizienten des Terms $z14$ in $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ entspricht.

$$
\begin{aligned}
\overline{C}_{14} \quad = & \\
- \quad C_A\, C_F & \Bigg(\frac{1091604093495466064326488697237918073124317588850727464605026582189}{477977422280347789839841161280550992158002444343705600000 0} \\
& - \frac{1296061527675628854161014980661984929 1\, z_3}{682170405946775527363706880 00} - \frac{4487268449877984028000256\, l_m}{376220079832571989201687 5} \\
& + \frac{92274688\, {l_m}^2}{300540195} \Bigg) \\
+ \quad C_F\, n_l\, T & \Bigg(\frac{516564482407187039102187547967946752}{860602935160007866680547434318703125} - \frac{1206853209024497716979302 4\, l_m}{413842087815829188121856 25} \\
& + \frac{33554432\, {l_m}^2}{300540195} \Bigg) \\
- \quad C_F\, T & \Bigg(\frac{122555645256726219481252568844525296962219}{332530416677989992706509630894432583680 00} - \frac{5126158995974792245\, z_3}{1729382256910270464} \\
& + \frac{1206853209024497716979302 4\, l_m}{413842087815829188121856 25} - \frac{33554432\, {l_m}^2}{300540195} \Bigg) \\
- \quad {C_F}^2 & \Bigg(\frac{376587020476063751998505159753962196199230859213283691304430427890 57}{12361485058974511806202788653807353245465580457164800000 00} \\
& - \frac{285548950877185280838104268851268702877246 37\, z_3}{112670675098199179977026646835 2000} - \frac{234881024\, {l_m}^2}{33393355} \\
& + \frac{4972878446154998650241024\, l_m}{656892202882268552574375} \Bigg)
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

Die Stärke dieser Methode zeigt sich in der Laufzeit des Programms. Innerhalb von nur ca. 30 Minuten konnten die Entwicklungen der Masterintegrale bis $\mathcal{O}(z^{30})$ gewonnen werden, die Reduktion benötigt etwa 4 Stunden auf einem AMD Opteron mit 2.4 GHz Taktfrequenz. Da die Laufzeit zur Ermittlung der Entwicklungen nur linear mit der Anzahl der Schleifen und der gewünschten maximalen Ordnung in z steigt, ist dieser Ansatz auch für höhere Schleifenordnungen geeignet und effizient.

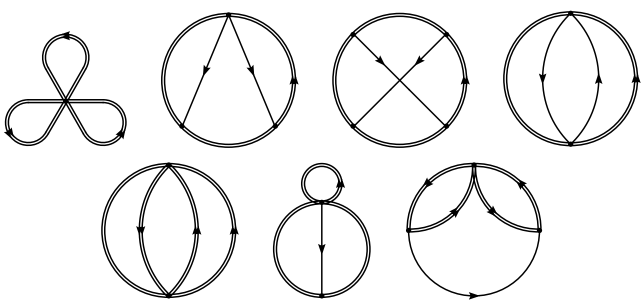


Abbildung 4.4: Alle Vakuum-Diagramme, die zur Berechnung der Taylorreihenentwicklung $\Pi_{3L}^{\exp}(z)$ benötigt werden

Masterintegrale der Vakuumpolarisation in $\mathcal{O}(\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{3}})$

Als ersten Schritt auf dem Weg zur vollen Vakuumpolarisationsfunktion in $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ wurde als Nächstes nur ein kleiner Teil der beitragenden Diagramme, der Fall mit zwei virtuellen geschlossenen Fermionen-Linien oder der Koeffizient der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^3 n_f^2)$ mit der Anzahl der Fermionen n_f, betrachtet. Eine Reduktion dieser 12 Diagramme führt auf 46 propagatorartige und bisher unbekannte Masterintegrale.

Entwickelt man diese Masterintegrale mit `SolveMaster`, so erfordert dies die Kenntnis von nur sechs Vakuumdiagrammen als Randbedingungen. Alle diese Randbedingungen sind aus Kap. 3.3 bekannt. Die Laufzeit dieser Entwicklungen lag wieder deutlich unterhalb einer Stunde und alle in diesem Problem auftauchenden Masterintegrale wurden erstmalig bis $\mathcal{O}(z^{30})$ erhalten. Exemplarisch wird hier die Reihe für den in Abb. 4.5 dargestellten Master $M(z)$ wieder nur numerisch in Gl. (4.22) angegeben, alle Koeffizienten sind aber analytisch bekannt und besitzen eine ähnlich komplizierte Struktur wie die Koeffizienten (4.21).

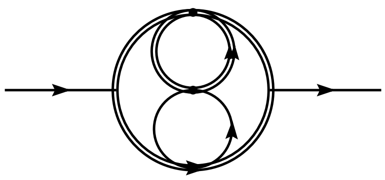


Abbildung 4.5: Exemplarisches Masterintegral $M(z)$

$$
\begin{aligned}
M(z) \;=\; & 2078.45 + 6170.58\,z - 576.172\,z^2 - 1611.2\,z^3 - 7103.33\,z^4 - 13572.\,z^5 - 19677.5\,z^6 \\
& -25101.1\,z^7 - 29839.4\,z^8 - 33972.1\,z^9 - 37590.8\,z^{10} - 40778.5\,z^{11} - 43604.8\,z^{12} \\
& -46126.9\,z^{13} - 48391.3\,z^{14} - 50435.9\,z^{15} - 52291.5\,z^{16} - 53983.8\,z^{17} - 55533.9\,z^{18} \\
& -56959.3\,z^{19} - 58275.\,z^{20} - 59493.5\,z^{21} - 60625.5\,z^{22} - 61680.2\,z^{23} - 62665.4\,z^{24} \\
& -63588.\,z^{25} - 64454.\,z^{26} - 65268.6\,z^{27} - 66036.4\,z^{28} - 66761.4\,z^{29} - 67447.2\,z^{30} \\
+ & \frac{1}{\epsilon}\,(-44.41 - 2120.10\,z + 4486.4\,z^2 + 2947.35\,z^3 + 523.33\,z^4 - 1471.84\,z^5 - 3046.49\,z^6 \\
& -4311.66\,z^7 - 5353.2\,z^8 - 6229.5\,z^9 - 6979.9\,z^{10} - 7632.0\,z^{11} - 8205.4\,z^{12} \\
& -8714.7\,z^{13} - 9170.7\,z^{14} - 9582.1\,z^{15} - 9955.3\,z^{16} - 10295.8\,z^{17} - 10608.0\,z^{18} \\
& -10895.3\,z^{19} - 11160.9\,z^{20} - 11407.1\,z^{21} - 11636.1\,z^{22} - 11849.7\,z^{23} - 12049.5\,z^{24} \\
& -12236.8\,z^{25} - 12412.8\,z^{26} - 12578.4\,z^{27} - 12734.7\,z^{28} - 12882.5\,z^{29} - 13022.3\,z^{30}) \\
+ & \frac{1}{\epsilon^2}\,(-281.914 + 16.0318\,z - 1416.48\,z^2 - 1551.79\,z^3 - 1405.29\,z^4 - 1311.64\,z^5 \\
& -1284.60\,z^6 - 1301.88\,z^7 - 1344.95\,z^8 - 1401.83\,z^9 - 1465.28\,z^{10} - 1531.01\,z^{11} \\
& -1596.50\,z^{12} - 1660.33\,z^{13} - 1721.71\,z^{14} - 1780.25\,z^{15} - 1835.80\,z^{16} - 1888.36\,z^{17} \\
& -1938.01\,z^{18} - 1984.86\,z^{19} - 2029.07\,z^{20} - 2070.80\,z^{21} - 2110.19\,z^{22} - 2147.42\,z^{23} \\
& -2182.62\,z^{24} - 2215.94\,z^{25} - 2247.50\,z^{26} - 2277.44\,z^{27} - 2305.86\,z^{28} - 2332.86\,z^{29} \\
& -2358.55\,z^{30})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{\epsilon^3}\,(-6.01024 + 55.8793\,z + 418.898\,z^2 + 274.544\,z^3 + 70.8163\,z^4 - 113.328\,z^5 \\
&\quad -267.477\,z^6 - 394.753\,z^7 - 500.224\,z^8 - 588.409\,z^9 - 662.902\,z^{10} - 726.469\,z^{11} \\
&\quad -781.231\,z^{12} - 828.823\,z^{13} - 870.512\,z^{14} - 907.295\,z^{15} - 939.962\,z^{16} - 969.146\,z^{17} \\
&\quad -995.361\,z^{18} - 1019.03\,z^{19} - 1040.48\,z^{20} - 1060.02\,z^{21} - 1077.88\,z^{22} - 1094.26\,z^{23} \\
&\quad -1109.34\,z^{24} - 1123.26\,z^{25} - 1136.14\,z^{26} - 1148.10\,z^{27} - 1159.23\,z^{28} - 1169.60\,z^{29} \\
&\quad -1179.30\,z^{30}) \\
&+\frac{1}{\epsilon^4}\,(48.9333 + 21.1458\,z + 38.9772\,z^2 + 33.2835\,z^3 + 16.9772\,z^4 + 1.60263\,z^5 \\
&\quad -11.1798\,z^6 - 21.5695\,z^7 - 30.0366\,z^8 - 37.0053\,z^9 - 42.8077\,z^{10} - 47.6950\,z^{11} \\
&\quad -51.8561\,z^{12} - 55.4338\,z^{13} - 58.5374\,z^{14} - 61.2515\,z^{15} - 63.6424\,z^{16} - 65.7623\,z^{17} \\
&\quad -67.6533\,z^{18} - 69.3492\,z^{19} - 70.8777\,z^{20} - 72.2617\,z^{21} - 73.5200\,z^{22} - 74.6685\,z^{23} \\
&\quad -75.7205\,z^{24} - 76.6873\,z^{25} - 77.5785\,z^{26} - 78.4024\,z^{27} - 79.1660\,z^{28} - 79.8756\,z^{29} \\
&\quad -80.5365\,z^{30})
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

Insgesamt zeigen diese beiden Beispiele, dass die Methode der Differentialgleichungen zum Lösen der Entwicklungen von propagatorartigen Integralen hervorragend geeignet und sehr effizient ist. So sollte es in absehbarer Zukunft, also sobald die gesamte Reduktion auf Masterintegrale in $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ verfügbar ist, möglich sein, eine Entwicklung der Vakuumpolarisation auf dem Vier-Schleifen-Niveau bis zu hohen Ordnungen in z und somit eine gute Padé-Approximation zu erhalten. Eine Alternative zu diesem Verfahren bietet die rein numerische Lösung der Differentialgleichungen. Dabei könnte man wiederum von Vakuumdiagrammen ausgehen und so punktweise numerische Werte für die Vakuumpolarisation erhalten. Zu diesem Zwecke existieren bereits einige funktionierende Software-Pakete (z.B. LAPACK [86]), die für einen solchen Lösungsansatz verwendet werden könnten. So sollte es mit Hilfe dieser Methoden und der Adlerfunktion möglich sein, die Präzision der Vorhersage von $\Delta\alpha_{\mathrm{had}}^{(5)}(M_Z^2)$ zu erhöhen.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit stehen phänomenologische Anwendungen der störungstheoretischen Entwicklung des schweren symmetrischen Vektorstromkorrelators bis zum Vier-Schleifen-Niveau.

Mit Hilfe von Summenregeln und einer ausführlichen aus Theorie und Experiment kombinierten Analyse konnten so neue und genauere Werte für die Massen des c- und b-Quarks erhalten werden. Der neue theoretische Eingabeparameter in dieser Analyse ist das erste Moment der massiven Photon-Vakuumpolarisation bis $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$, das im Rahmen dieser Arbeit erstmals berechnet wurde. So konnte die theoretische Unsicherheit in dieser Auswertung der Quarkmassen stark reduziert werden, im Falle des c-Quarks konnte im Vergleich zur Literatur auch der Einfluss des experimentellen Fehlers aufgrund neuer Daten der J/Ψ- und Ψ'-Resonanzen reduziert werden. Die Skalenabhängigkeit der so erhaltenen Quarkmassen ist mit dieser Berechnung so weit minimiert worden, dass eine Ermittlung der Vakuumpolarisation in einer höheren Ordnung nicht sinnvoll ist, solange der experimentelle Fehler nicht weiter reduziert werden kann. Insgesamt zeigt sich eine gute Übereinstimmung der berechneten Quarkmassen mit den Werten aus anderen in der Literatur angewendeten Methoden, was hervorragend die Äquivalenz der unterschiedlichen theoretischen Zugänge zeigt.

Als weiterer Schwerpunkt dieser Arbeit wurde auf das Laufen der Feinstrukturkonstante eingegangen. Die Unsicherheit der Feinstrukturkonstante auf der Z^0-Skala, die einen wichtigen Parameter für präzise Tests des elektroschwachen Sektors darstellt, kann - im Gegensatz zum ersten Moment - mit Hilfe einer vollen Berechnung der massiven Photon-Vakuumpolarisation bis $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ verringert werden. Eine Reduktion des experimentell beitragenden Fehlers wird hierbei durch Anwendung der Adler-Funktion erzielt. Die Skalenabhängigkeit der störungstheoretischen Beiträge dominiert die Gesamtunsicherheit und eine neue perturbative Betrachtung liefert tatsächlich eine Verbesserung. Da eine explizite Berechnung auf diesem Niveau eine große Herausforderung darstellt, wurde des Weiteren ein Verfahren zur Berechnung von Taylorreihenentwicklungen von skalaren Masterintegralen, die aus einer IBP-Reduktion der Vakuumpolarisation auf $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ resultieren, bis zu hohen Ordnungen in dem äußeren Impuls entwickelt und angewendet. Grundlage dieser Methode stellen Differentialgleichungen dar, die aus allgemeinen Skalierungseigenschaften von Zwei-Punkt-Funktionen gewonnen werden können. So konnte erstmals eine Teilmenge der in diesem Problem auftauchenden Masterintegrale im Grenzwert kleiner äußerer Impulse berechnet werden.
In näherer Zukunft sollte die vollständige IBP-Reduktion der Vier-Schleifen-Vakuumpolarisation verfügbar werden, eine Anwendung des hier entwickelten Verfahrens wird dann sehr schnell die Entwicklung der Polarisationsfunktion für kleine Impulse liefern, da alle nötigen Vakuumdiagramme als Randbedingungen bekannt sind. Zusammen mit den schon bekannten Entwicklungen für große Impulse und an der Schwelle kann dann eine Padé-Approximation und so eine Näherung der massiven Vakuumpolarisation auf dem $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$-Niveau erhalten werden. Als Alternative könnte auch eine rein numerische Lösung der entstehenden Differentialgleichungen herangezogen werden. Aus der Anwendung beider Verfahren könnte somit in näherer Zukunft eine genauere Auswertung des Laufens der Feinstrukturkonstante gewonnen werden.

A Berechnung von Schleifenintegralen

Zur Berücksichtigung von Korrekturen höherer Ordnung in der Störungstheorie ist es notwendig, geschlossene Schleifen in Feynmandiagrammen zu betrachten. Im Allgemeinen ist die Integration über den internen umlaufenden Impuls divergent und eine Regularisierung notwendig. Die üblichste Methode ist die dimensionale Regularisierung, d.h. die Integration wird in $D = 4 - 2\epsilon$ Dimensionen durchgeführt, im Limes $D \to 4$ äußern sich die auftretenden Divergenzen als Pole in ϵ. Zusätzlich tauchen Konstanten aus der Entwicklung der sich ergebenden Γ-Funktion und der Normierung des Integrationsmaßes $(4\pi)^D$ auf. Diese sind die Eulersche Konstante γ_E und $\ln 4\pi$ und werden im $\overline{\text{MS}}$-Schema zusammen mit den Divergenzen subtrahiert. Daher wird von vorn herein in allen Berechnungen ein Faktor $(\exp(\gamma_E)/(4\pi))^{\epsilon l}$ mit l der Anzahl der Schleifen berücksichtigt.
Die Grundlage zur Berechnung von Schleifenintegralen ist die Methode der partiellen Integration (*integration by parts*, IBP). Dabei wird davon ausgegangen, dass in D Dimensionen alle Integrale endlich sind und eine partielle Integration möglich ist:

$$\int d^D k \frac{\partial}{\partial k^\mu} I(k, \dots) = 0. \tag{A.1}$$

Der Oberflächenterm verschwindet und $I(k, \dots)$ enthält im Wesentlichen den Integranden des interessierenden Schleifendiagramms. Man erhält so Rekursionsformeln, die eine systematische Reduktion auf eine geringe Anzahl von sog. Masterintegralen ermöglichen. Diese Reduktion wurde von Laporta in einen Algorithmus verallgemeinert und in dem hier verwendeten Programmpaket $IdSolver$ implementiert.
Im Folgenden wird an einem Zwei-Schleifen-Beispiel in der QED skizziert, wie die Berechnung eines Diagramms mit Hilfe der IBPs durchgeführt wird.

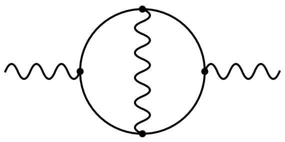


Abbildung A.1: Zwei-Schleifen-Diagramm in der QED.

Das Diagramm in Abb. A.1 entspricht dem Ausdruck

$$\begin{aligned} I^{\mu\nu}(p^2, m^2) &= \\ &= -e^4 \iint \frac{d^d k\, d^d l}{(2\pi)^{2d}} \mathrm{Tr} \frac{(\not{k} - \not{l} - m)\gamma^\mu(\not{p} + \not{k} - \not{l} - m)\gamma^\rho(\not{p} + \not{k} - m)\gamma^\nu(\not{k} - m)\gamma^\lambda g_{\rho\lambda}}{l^2((k-l)^2 - m^2)((p+k-l)^2 - m^2)((p+k)^2 - m^2)(k^2 - m^2)}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Als erster Schritt wird nun die Spur gebildet und ein Projektor angewendet, der die Lorenzindizes kontrahiert. Da es sich bei dem hier untersuchten Diagramm um einen Beitrag zur Photon-Vakuumpolarisation handelt, lässt sich dieses Integral unter Berücksichtigung der Transversalität schreiben als

$$I^{\mu\nu}(p^2,m^2) = \left(-p^2 g^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu\right) I(p^2,m^2), \tag{A.3}$$

woraus die Projektion $P^T_{\mu\nu}$ auf die skalare Funktion $I(p^2,m^2)$ folgt

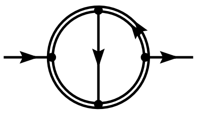
$$I(p^2,m^2) = \frac{g_{\mu\nu}}{D-1} I^{\mu\nu}(p^2,m^2) = P^T_{\mu\nu} I^{\mu\nu}(p^2,m^2). \tag{A.4}$$

Für den Transversalteil von $I^{\mu\nu}(p^2,m^2)$ ergibt sich damit und mit Bildung der Spur

$$\begin{aligned}
&I(p^2,m^2) = \\
&\quad = -e^4 \iint \frac{d^D k\, d^D l}{(2\pi)^{2D}(D-1)} \frac{1}{l^2((k-l)^2-m^2)((p+k-l)^2-m^2)((p+k)^2-m^2)(k^2-m^2)} \\
&\qquad \times \big[8(4-6D+D^2)(p^2\,k^2+p^2(k\cdot l)) + 4(4-2D+D^2)(2\,p\cdot k + p\cdot l - k^2 - k\cdot l) \\
&\qquad -4(4-4D+D^2)p^2 - 4(2-D)(4(p\cdot k)(p\cdot l) - 2\,D\,k^2(p\cdot k) - 2\,D(p\cdot k)(k\cdot l) + 4(p\cdot k)^2 \\
&\qquad -D\,k^2(p\cdot l) - 4(p\cdot l)(k\cdot l) + 2\,D\,k^2(k\cdot l) + D\,k^4 + 4(k\cdot l)^2 + D)\big]\,.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Der so erhaltene Ausdruck besitzt im Nenner des Integranden die Propagatorstruktur des Diagramms zusammen mit Skalarprodukten im Zähler. Um diesen Ausdruck weiter zu vereinfachen, betrachten wir nun nur einen Teil des Feynman-Integrals

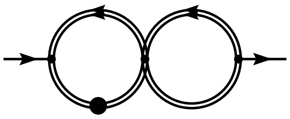
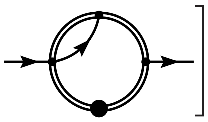
$$\begin{aligned}
&S(p^2,m^2) = \\
&\quad = -\frac{e^4}{D-1} \iint \frac{d^D k\, d^D l}{(2\pi)^{2D}} \frac{4\,D\,(2-D)}{l^2((k-l)^2-m^2)((p+k-l)^2-m^2)((p+k)^2-m^2)(k^2-m^2)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{4\,D\,(D-2)}{D-1}$$  (A.6)

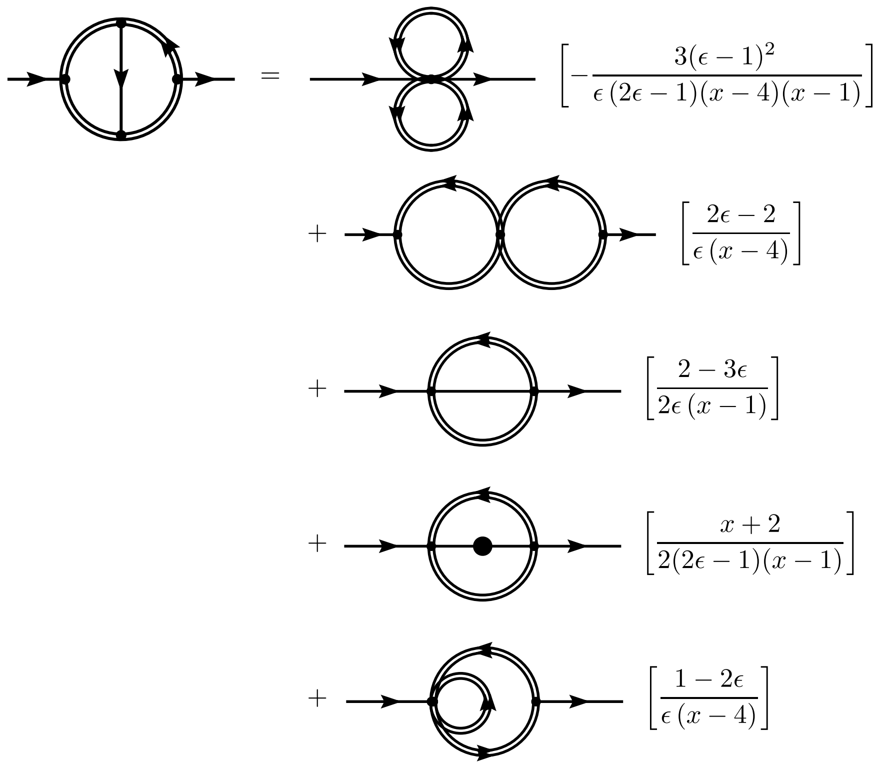
Anwendung der IBP über den Integrationsimpuls l_μ

$$-\frac{e^4}{D-1} \iint \frac{d^D k\, d^D l}{(2\pi)^{2D}} \frac{\partial}{\partial l_\mu} \frac{4\,l_\mu\,D\,(2-D)}{l^2((k-l)^2-m^2)((p+k-l)^2-m^2)((p+k)^2-m^2)(k^2-m^2)} \tag{A.7}$$

liefert mit $D = 4-2\epsilon$ folgende Relation

$$S(p^2,m^2) = -\frac{16(\epsilon-2)(\epsilon-1)}{\epsilon(2\epsilon-3)} \Bigg[$$  $-$  $\Bigg]$ (A.8)

Das Integral auf der rechten Seite kann so durch andere Integrale ausgedrückt werden. Wendet man nun die IBPs weiter rekursiv in k und l mit *IdSolver* an, so erhält man für $S(p^2,m^2)$



Die Integrale auf der rechten Seite entsprechen den aus $S(p^2, m^2)$ hervorgehenden Masterintegralen. Einige dieser so entstandenen skalaren Diagramme können aus bekannten Ein-Schleifen-Berechnungen multiplikativ ermittelt werden, Andere sind nach wie vor nicht trivial, in dieser Ordnung aber bekannt.

Anhand dieses Beispiels erkennt man schon eine mit Komplikationen verbundene Eigenschaft der aus IBPs hervorgehenden Relationen: In den Koeffizienten können künstliche $1/\epsilon$-Pole auftreten, die eine Kenntnis der Master bis hin zur "richtigen" Ordnung in ϵ erfordern. Eine Analyse der Koeffizienten ist daher in praktischen Anwendungen unumgänglich.

Führt man die hier gezeigten Schritte für alle in (A.5) vorkommenden skalaren Integrale durch, so stellt man fest, dass die für $S(p^2, m^2)$ gefundenen Masterintegrale bereits eine komplette Basis für die ursprüngliche Feynman-Amplitude darstellen und das QED-Diagramm gelöst werden konnte. Auf die Angabe der länglichen Ausdrücke soll hier verzichtet werden.

B Renormierungskonstanten im $\overline{\mathrm{MS}}$-Schema

In diesem Abschnitt werden die Renormierungskonstanten für die $\overline{\mathrm{MS}}$-Kopplung (Z_{α_s}), die Masse (Z_m) und die Vakuumpolarisation hergeleitet und angegeben. Die RG-Funktionen für die Änderung der Kopplung und der Masse mit der beliebigen Renormierungsskala μ lauten:

$$\beta(a_s) = -\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} a_s(\mu^2) = \beta_0 a_s^2 + \beta_1 a_s^3 + \ldots \tag{B.1}$$

$$\gamma(a_s) = -\frac{\mu^2}{m}\frac{d}{d\mu^2} m(\mu^2) = \gamma_0 a_s + \gamma_1 a_s^2 + \ldots, \tag{B.2}$$

mit $a_s(\mu^2) = \alpha_s(\mu^2)/\pi$. Die Störungsentwicklung der β-Funktion und der anomalen Massendimension $\gamma(a_s)$ wurde explizit angegeben. Die Koeffizienten γ_i und β_i sind bis zur Vier-Schleifen-Ordnung bekannt [64, 87, 88] und lauten

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \frac{1}{4}\left[3C_F\right] \\
\gamma_1 &= \frac{1}{16}\left[\frac{3}{2}C_F^2 + \frac{97}{6}C_F C_A - \frac{10}{3}C_F T n_f\right] \\
\gamma_2 &= \frac{1}{64}\left[\frac{129}{2}C_F^3 - \frac{129}{4}C_F^2 C_A + \frac{11413}{108}C_F C_A^2\right. \\
&\quad \left. + C_F^2 T n_f(-46 + 48\zeta_3) + C_F C_A T n_f\left(-\frac{556}{27} - 48\zeta_3\right) - \frac{140}{27}C_F T^2 n_f^2\right] \\
\gamma_3 &= \frac{1}{256}\left[C_F^4\left(-\frac{1261}{8} - 336\zeta_3\right) + C_F^3 C_A\left(\frac{15349}{12} + 316\zeta_3\right)\right. \\
&\quad + C_F^2 C_A^2\left(-\frac{34045}{36} - 152\zeta_3 + 440\zeta_5\right) + C_F C_A^3\left(\frac{70055}{72} + \frac{1418}{9}\zeta_3 - 440\zeta_5\right) \\
&\quad + C_F^3 T n_f\left(-\frac{280}{3} + 552\zeta_3 - 480\zeta_5\right) + C_F^2 C_A T n_f\left(-\frac{8819}{27} + 368\zeta_3 - 264\zeta_4 + 80\zeta_5\right) \\
&\quad + C_F C_A^2 T n_f\left(-\frac{65459}{162} - \frac{2684}{3}\zeta_3 + 264\zeta_4 + 400\zeta_5\right) \\
&\quad + C_F^2 T^2 n_f^2\left(\frac{304}{27} - 160\zeta_3 + 96\zeta_4\right) \\
&\quad + C_F C_A T^2 n_f^2\left(\frac{1342}{81} + 160\zeta_3 - 96\zeta_4\right) + C_F T^3 n_f^3\left(-\frac{664}{81} + \frac{128}{9}\zeta_3\right) \\
&\quad \left. + \frac{d_F^{abcd} d_A^{abcd}}{N_F}(-32 + 240\zeta_3) + n_f \frac{d_F^{abcd} d_F^{abcd}}{N_F}(64 - 480\zeta_3)\right]
\end{aligned} \tag{B.3}$$

$$
\begin{aligned}
\beta_0 &= \frac{11}{3}C_A - \frac{4}{3}Tn_f \\
\beta_1 &= \frac{34}{3}C_A^2 - 4C_F T n_f - \frac{20}{3}C_A T n_f \\
\beta_2 &= \frac{2857}{54}C_A^3 + 2C_F^2 T n_f - \frac{205}{9}C_F C_A T n_f \\
&\quad -\frac{1415}{27}C_A^2 T n_f + \frac{44}{9}C_F T^2 n_f^2 + \frac{158}{27}C_A T^2 n_f^2 \\
\beta_3 &= C_A^4\left(\frac{150653}{486} - \frac{44}{9}\zeta_3\right) + C_A^3 T n_f\left(-\frac{39143}{81} + \frac{136}{3}\zeta_3\right) \\
&\quad +C_A^2 C_F T n_f\left(\frac{7073}{243} - \frac{656}{9}\zeta_3\right) + C_A C_F^2 T n_f\left(-\frac{4204}{27} + \frac{352}{9}\zeta_3\right) \\
&\quad +46 C_F^3 T n_f + C_A^2 T^2 n_f^2\left(\frac{7930}{81} + \frac{224}{9}\zeta_3\right) + C_F^2 T^2 n_f^2\left(\frac{1352}{27} - \frac{704}{9}\zeta_3\right) \\
&\quad +C_A C_F T^2 n_f^2\left(\frac{17152}{243} + \frac{448}{9}\zeta_3\right) + \frac{424}{243}C_A T^3 n_f^3 + \frac{1232}{243}C_F T^3 n_f^3 \\
&\quad +\frac{d_A^{abcd}d_A^{abcd}}{N_A}\left(-\frac{80}{9} + \frac{704}{3}\zeta_3\right) + n_f\frac{d_F^{abcd}d_A^{abcd}}{N_A}\left(\frac{512}{9} - \frac{1664}{3}\zeta_3\right) \\
&\quad +n_f^2\frac{d_F^{abcd}d_F^{abcd}}{N_A}\left(-\frac{704}{9} + \frac{512}{3}\zeta_3\right). \qquad \text{(B.4)}
\end{aligned}
$$

Die Colour-Faktoren ergeben sich aus Invarianten der SU(N). Sind T^a die Generatoren und f^{abc} die Strukturkonstanten der Lie-Algebra der SU(N), so entsprechen $[T^a, T^a]_{ij} = C_F\delta_{ij}$ und $f^{acd}f^{bcd} = C_A\delta^{ab}$ den Casimir-Operatoren der fundamentalen und adjungierten Darstellung. Außerdem ist $\mathrm{Tr}(\mathrm{T^aT^b}) = \mathrm{T}$ die Normierung der Spur, N_F und N_A sind die Dimensionen der fundamentalen bzw. adjungierten Darstellung. Die Invarianten höherer Ordnung werden ausgedrückt durch die symmetrischen Tensoren

$$
\begin{aligned}
d_F^{abcd} &= \frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left[T^aT^bT^cT^d + T^aT^bT^dT^c + T^aT^cT^bT^d \right.\\
&\qquad \left. +T^aT^cT^dT^b + T^aT^dT^bT^c + T^aT^dT^cT^b\right] \qquad \text{(B.5)}\\
d_A^{abcd} &= \frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left[C^aC^bC^cC^d + C^aC^bC^dC^c + C^aC^cC^bC^d \right.\\
&\qquad \left. +C^aC^cC^dC^b + C^aC^dC^bC^c + C^aC^dC^cC^b\right] \qquad \text{(B.6)}
\end{aligned}
$$

mit den Generatoren C^a der adjungierten Darstellung. Für die SU(N) erhält man für die Colour-Faktoren die Werte:

$$
T = \frac{1}{2}, \quad C_F = \frac{N^2-1}{2N}, \quad C_A = N, \quad = \frac{d_F^{abcd}d_F^{abcd}}{N_A} = \frac{N^4 - 6N^2 + 18}{96N^2}, \qquad \text{(B.7)}
$$

$$
\frac{d_F^{abcd}d_A^{abcd}}{N_A} = \frac{N(N^2+6)}{48}, \quad \frac{d_A^{abcd}d_A^{abcd}}{N_A} = \frac{N^2(N^2+36)}{24}, \quad N_A = N^2 - 1 \qquad \text{(B.8)}
$$

Die $\beta(a_s)$-Funktion und die anomale Massendimension $\gamma(a_s)$ lassen sich mit Hilfe der Relation zwischen nackter und renormierter Masse bzw. Kopplung $\alpha_s^0 = Z_{\alpha_s}\alpha_s$ und $m^0 = Z_m m$ in

Beziehung mit den Renormierungskonstanten setzen:

$$\beta(a_s) = -\,\mu^2\frac{da_s}{d\mu^2} = \mu\frac{a_s}{Z_{\alpha_s}}\frac{dZ_{\alpha_s}}{d\mu^2} - \frac{\mu^2}{Z_{\alpha_s}}\frac{da_s^0}{d\mu^2} = a_s\beta(\alpha_s)\frac{d\ln Z_{\alpha_s}}{da_s} + \epsilon a_s,$$
$$\gamma(a_s) = -\,\mu^2\frac{dm}{d\mu^2} = \frac{\mu^2}{Z}\frac{dZ_m}{d\mu^2} - \frac{\mu^2}{m^0}\frac{dm^0}{d\mu^2} = \frac{d\ln Z_m}{da_s}(\epsilon a_s - \beta(a_s)), \tag{B.9}$$

wobei ausgenutzt wurde, dass die Kopplung in D Dimensionen als $\alpha_s = \mu^{-2\epsilon}g^2/(4\pi)$ definiert und die nackte Masse unabhängig von der Wahl der Renormierungsskala ist.
Setzt man nun die Renormierungskonstanten in ihrer allgemeinen Störungsentwicklung aus (2.17) in (B.9) ein, berücksichtigt die Entwicklung der β-Funktion und $\gamma(a_s)$ und löst die so entstandenen Gleichungen Ordnung für Ordnung, so erhält man die Renormierungskonstanten im $\overline{\text{MS}}$-Schema:

$$\begin{aligned}
Z_{\alpha_s} - 1 = \; & -a_s\left[\frac{1}{\epsilon}\left(\frac{11}{12}\,C_A - \frac{1}{3}\,n_fT\right)\right] \qquad\qquad (\text{B.10})\\
& + a_s^2\left[\frac{1}{\epsilon^2}\left(\frac{11}{12}\,C_A - \frac{1}{3}\,n_fT\right)^2 - \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{17}{48}\,C_A^2 - \frac{5}{24}\,C_An_fT - \frac{1}{8}C_Fn_fT\right)\right]\\
& - a_s^3\Bigg[\frac{1}{\epsilon^3}\left(\frac{11}{12}\,C_A - \frac{1}{3}\,n_fT\right)^3 - \frac{1}{\epsilon^2}\Bigg(\frac{1309}{1728}\,C_A^3 - \frac{623}{864}\,C_A^2n_fT - \frac{77}{288}\,C_AC_Fn_fT\\
& \qquad + \frac{35}{216}\,C_A{n_f}^2T^2 + \frac{7}{72}\,C_F{n_f}^2T^2\Bigg) - \frac{1}{\epsilon}\Bigg(-\frac{2857}{10368}\,{C_A}^3 + \frac{1415}{5184}\,{C_A}^2n_fT\\
& \qquad + \frac{205}{1728}\,C_AC_Fn_fT - \frac{1}{96}\,{C_F}^2n_fT - \frac{79}{2592}\,C_An_f^2T^2 - \frac{11}{432}\,C_F{n_f}^2T^2\Bigg)\Bigg],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_m - 1 = \; & -a_s\left(\frac{3}{4\epsilon}\right)\\
& + a_s^2\Bigg[\frac{1}{\epsilon^2}\left(\frac{11}{32}\,C_AC_F + \frac{9}{32}\,C_F^2 - \frac{1}{8}\,C_Fn_fT\right)\\
& \qquad - \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{97}{192}\,C_AC_F + \frac{3}{64}\,C_F^2 - \frac{5}{48}C_Fn_fT\right)\Bigg]\\
& + a_s^3\Bigg[\frac{1}{\epsilon^3}\Bigg(-\frac{121}{576}\,C_A^2C_F - \frac{33}{128}\,C_AC_F^2 - \frac{9}{128}\,C_F^3 + \frac{11}{72}\,C_AC_Fn_fT + \frac{3}{32}\,C_F^2n_fT\\
& \qquad - \frac{1}{36}\,C_Fn_f^2T^2\Bigg) + \frac{1}{\epsilon^2}\Bigg(\frac{1679}{3456}\,C_A^2C_F + \frac{313}{768}\,C_AC_F^2 + \frac{9}{256}\,C_F^3\\
& \qquad - \frac{121}{432}\,C_AC_Fn_fT - \frac{29}{129}\,C_F^2n_fT + \frac{5}{216}C_Fn_f^2T^2\Bigg) + \frac{1}{\epsilon}\Bigg(-\frac{11413}{20736}\,C_A^2C_F\\
& \qquad + \frac{43}{256}\,C_AC_F^2 - \frac{43}{128}C_F^3 + \frac{139}{1296}\,C_AC_Fn_fT + \frac{23}{96}\,C_F^2n_fT + \frac{35}{1296}\,C_Fn_f^2T^2\\
& \qquad + \frac{\zeta_3}{4}\,C_AC_Fn_fT - \frac{\zeta_3}{4}\,C_F^2n_fT\Bigg)\Bigg].
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Die Renormierungsbedingung für die Vakuumpolarisation lautet,

$$\Pi^h_R(p^2 = 0) = 0, \tag{B.12}$$

und wird nach erfolgter Parameterrenormierung über die Subtraktion der folgenden Konstante gewährleistet:

$$\begin{aligned}
\Pi^h(m, \alpha_s, p^2 = 0) \quad = \quad & \frac{4.}{\epsilon} - 4.\, l_m + a \left(\frac{8.}{\epsilon} + 17.333 + 16.\, l_m \right) \\
& + a^2 \left(\frac{1}{\epsilon^2} \left(-27.556 + 1.7778\, n_l\right) + \frac{1}{\epsilon} \left(52.296 - 3.2593\, n_l\right) \right. \\
& \quad + 82.796 + 17.827\, n_l + 56.889\, l_m + 3.5556\, n_l\, l_m - 82.667\, l_m^2 \\
& \quad \left. + 5.3333\, n_l\, l_m^2 \right) \\
& + a^3 \left(\frac{1}{\epsilon^3} \left(142.37 - 18.370\, n_l + 0.59259\, n_l^2\right) + \frac{1}{\epsilon^2} \left(-448.86 + 59.605\, n_l \right. \right. \qquad \text{(B.13)} \\
& \quad \left. - 1.0864\, n_l^2\right) + \frac{1}{\epsilon} \left(491.48 - 133.26\, n_l - 1.2675\, n_l^2\right) - 382.13 \\
& \quad - 227.71\, n_l + 4.9357\, n_l^2 + 1044.5\, l_m - 659.89\, n_l\, l_m + 15.012\, n_l^2\, l_m \\
& \quad - 641.19\, l_m^2 + 59.852\, n_l\, l_m^2 + 2.3704\, n_l^2\, l_m^2 + 569.48\, l_m^3 \\
& \quad \left. - 73.481\, n_l\, l_m^3 + 2.3704\, n_l^2\, l_m^3 \right) .
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Diese Konstante wurde für die Renormierung des ersten physikalischen Momentes nicht benötigt und ist deshalb nur numerisch angegeben.

Literaturverzeichnis

[1] S. Eidelman et al. Review of Particle Physics. *Physics Letters B*, 592:1+, 2004.

[2] K. G. Chetyrkin, R. Harlander, and M. Steinhauser. Singlet polarization functions at $O(\alpha_s^2)$. *Phys. Rev.*, D58:014012, 1998.

[3] R. Boughezal, M. Czakon, and T. Schutzmeier. Charm and bottom quark masses from perturbative QCD. 2006.

[4] K.G. Chetyrkin, J.H. Kuhn, and A. Kwiatkowski. QCD corrections to the e+ e- cross-section and the Z boson decay rate: Concepts and results. *Phys. Rept.*, 277:189–281, 1996.

[5] M.E. Peskin and D.V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Perseus Books, Cambridge, Massachusetts, 1995.

[6] V. V. Ezhela, S. B. Lugovsky, and O. V. Zenin. Hadronic part of the muon g-2 estimated on the $\sigma(total)$(2003)(e+ e- $\rightarrow$ hadrons) evaluated data compilation. 2003.

[7] J. Iizuka. Systematics and phenomenology of meson family. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 37:21–34, 1966.

[8] S. Okubo. Phi meson and unitary symmetry model. *Phys. Lett.*, 5:165–168, 1963.

[9] G. Zweig. An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. 2. 1964. CERN-TH-412.

[10] A. Quenzer et al. Pion form-factor from 480 MeV to 1100 MeV. (talk). *Phys. Lett.*, B76:512–516, 1978.

[11] S. I. Eidelman. Recent results on low energy e+ e- $\rightarrow$ hadrons. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 144:223–230, 2005.

[12] H. Abramowicz et al. Neutrino and anti-neutrino charged current inclusive scattering in iron in the energy range 20 GeV $<$ neutrino energy $<$ 300 GeV. *Z. Phys.*, C17:283, 1983.

[13] J. J. Aubert et al. Experimental observation of a heavy particle J. *Phys. Rev. Lett.*, 33:1404–1406, 1974.

[14] J. E. Augustin et al. Discovery of a narrow resonance in e+ e- annihilation. *Phys. Rev. Lett.*, 33:1406–1408, 1974.

[15] A.A. Penin, V.A. Smirnov, and M. Steinhauser. Heavy quarkonium spectrum and production / annihilation rates to order $\beta_0^3\alpha_s^3$. *Nucl. Phys.*, B716:303–318, 2005.

[16] J. Z. Bai et al. Measurements of the cross section for e+ e- $\rightarrow$ hadrons at center-of-mass energies from 2 GeV to 5 GeV. *Phys. Rev. Lett.*, 88:101802, 2002.

[17] G. Lanfranchi. Recent results from the KLOE experiment. *Int. J. Mod. Phys.*, A20:493–502, 2005.

[18] E. Charles. Review of recent BaBar results related to QCD. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 152:119–121, 2006.

[19] S. Binner, J. H. Kuhn, and K. Melnikov. Measuring σ(e+ e- $\rightarrow$ hadrons) using tagged photon. *Phys. Lett.*, B459:279–287, 1999.

[20] B. Aubert et al. Measurements of moments of the hadronic mass distribution in semileptonic B decays. *Phys. Rev.*, D69:111103, 2004.

[21] B. Aubert et al. Study of e+ e- $\rightarrow$ pi+ pi- pi0 process using initial state radiation with BaBar. *Phys. Rev.*, D70:072004, 2004.

[22] R. Alemany, M. Davier, and A. Hocker. Improved determination of the hadronic contribution to the muon (g-2) and to $\alpha(m_z^2)$ using new data from hadronic tau decays. *Eur. Phys. J.*, C2:123–135, 1998.

[23] Yung-Su Tsai. Decay correlations of heavy leptons in e+ e- $\rightarrow$ lepton+ lepton-. *Phys. Rev.*, D4:2821, 1971.

[24] k. Hagiwara et al. Hadronic contributions to a_μ. *Phys. Lett.*, B557:69, 2003.

[25] V. Cirigliano, G. Ecker, and H. Neufeld. Isospin violation and the magnetic moment of the muon. *Phys. Lett.*, B513:361–370, 2001.

[26] M. Davier, S. Eidelman, A. Hocker, and Z. Zhang. Updated estimate of the muon magnetic moment using revised results from e+ e- annihilation. *Eur. Phys. J.*, C31:503–510, 2003.

[27] F. Jegerlehner. The role of σ(e+ e- $\rightarrow$ hadrons) in precision tests of the standard model. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 131:213–222, 2004.

[28] D.J. Broadhurst. Chiral symmetry breaking and perturbative qcd. *Phys. Lett.*, B101:423–426, 1981.

[29] G. Kallen and A. Sabry. Fourth order vacuum polarization. 1955. CERN-55-17.

[30] D.J. Broadhurst, J. Fleischer, and O. V. Tarasov. Two loop two point functions with masses: Asymptotic expansions and Taylor series, in any dimension. *Z. Phys.*, C60:287–302, 1993.

[31] B.A. Kniehl. Two loop corrections to the vacuum polarizations in perturbative QCD. *Nucl. Phys.*, B347:86–104, 1990.

[32] E. Remiddi and J. A. M. Vermaseren. Harmonic polylogarithms. *Int. J. Mod. Phys.*, A15:725–754, 2000.

[33] T. Gehrmann and E. Remiddi. Two-loop master integrals for gamma* $\rightarrow$ 3jets: The planar topologies. *Nucl. Phys.*, B601:248–286, 2001.

[34] K.G. Chetyrkin, J.H. Kuhn, and M. Steinhauser. Three-loop polarization function and $O(\alpha_s^2)$ corrections to the production of heavy quarks. *Nucl. Phys.*, B482:213–240, 1996.

[35] S. G. Gorishnii, A. L. Kataev, and S. A. Larin. Correction $O(\alpha_s^3)$ to $\sigma(tot)$ (e+ e- $\rightarrow$ hadrons) in quantum chromodynamics. *JETP Lett.*, 53:127–131, 1991.

[36] K. G. Chetyrkin, R. V. Harlander, and J. H. Kuhn. Quartic mass corrections to $r(had)$ at $O(\alpha_s^3)$. *Nucl. Phys.*, B586:56–72, 2000.

[37] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin, and J. H. Kuhn. Five-loop vacuum polarization in pqcd: $O(m_q^2\alpha_s^4 n_f^2)$ contribution. *Phys. Lett.*, B559:245–251, 2003.

[38] K. G. Chetyrkin and V.A. Smirnov. R* operation corrected. *Phys. Lett.*, B144:419–424, 1984.

[39] T. Appelquist and J. Carazzone. Infrared singularities and massive fields. *Phys. Rev.*, D11:2856, 1975.

[40] K. G. Chetyrkin, B. A. Kniehl, and M. Steinhauser. Decoupling relations to $O(\alpha_s^3)$ and their connection to low-energy theorems. *Nucl. Phys.*, B510:61–87, 1998.

[41] Y. Schroder and M. Steinhauser. Four-loop decoupling relations for the strong coupling. *JHEP*, 01:051, 2006.

[42] K. G. Chetyrkin, J. H. Kuhn, and C. Sturm. QCD decoupling at four loops. *Nucl. Phys.*, B744:121–135, 2006.

[43] T. Kinoshita. Mass singularities of feynman amplitudes. *J. Math. Phys.*, 3:650, 1962.

[44] T.D. Lee and M. Nauenberg. Degenerate systems and mass singularities. *Phys. Rev.*, 133:1549, 1963.

[45] A.V. Smirnov. *Applied Asymptotic Expansions in Momenta and Masses.* Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[46] S.G. Gorishny and S.A Larin. *Nucl. Phys.*, B 287:452, 1987.

[47] S. Groote and A. A. Pivovarov. Heavy quark induced effective action for gauge fields in the $su_c(n) \times u(1)$ model and the low-energy structure of heavy quark current correlators. *Eur. Phys. J.*, C21:133–143, 2001.

[48] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin, and J. H. Kuhn. Multiloop calculations: Towards R at order α_s^4. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 157:27–31, 2006.

[49] S. Laporta. High-precision calculation of multi-loop feynman integrals by difference equations. *Int. J. Mod. Phys.*, A15:5087–5159, 2000.

[50] S. Laporta. High-precision epsilon expansions of massive four-loop vacuum bubbles. *Phys. Lett.*, B549:115–122, 2002.

[51] Y. Schroder and A. Vuorinen. High-precision epsilon expansions of single-mass-scale four-loop vacuum bubbles. *JHEP*, 06:051, 2005.

[52] R. Boughezal and M. Czakon. Single scale tadpoles and $O(g_f m_t^2 alpha_s^3)$ corrections to the rho parameter. 2006.

[53] D.H Bailey. Integer relation detection. *Computing in Science & Engineering*, 2(1):24–28, 2000.

[54] J. Portoles and P. D. Ruiz-Femenia. On the massless contributions to the vacuum polarization of heavy quarks. *J. Phys.*, G29:349–356, 2003.

[55] J. Portoles and P. D. Ruiz-Femenia. New contributions to heavy quark sum rules. *Eur. Phys. J.*, C24:439–446, 2002.

[56] A. J. Buras, M. Gorbahn, U. Haisch, and U. Nierste. The rare decay k+ $\rightarrow$ pi+ nu anti-nu at the next-to-next- to-leading order in qcd. 2005.

[57] Q. Mason, H. D. Trottier, R. Horgan, C. T. H. Davies, and G. P. Lepage. High-precision determination of the light-quark masses from realistic lattice QCD. *Phys. Rev.*, D73:114501, 2006.

[58] A. H. Hoang. Heavy quarkonium dynamics. 2002.

[59] D. Broadhurst et al. Two loop gluon condensate contributions to heavy quark current correlators: Exact results and approximations. *Phys. Lett.*, B329:103–110, 1994.

[60] A. H. Hoang and M. Jamin. MS-bar charm mass from charmonium sum rules with contour improvement. *Phys. Lett.*, B594:127–134, 2004.

[61] V. A. Novikov et al. Charmonium and gluons: Basic experimental facts and theoretical introduction. *Phys. Rept.*, 41:1–133, 1978.

[62] M. Czakon. DiaGen/IdSolver. *unpublished*.

[63] K. G. Chetyrkin and F. V. Tkachov. Integration by parts: the algorithm to calculate beta functions in 4 loops. *Nucl. Phys.*, B192:159–204, 1981.

[64] M. Czakon. The four-loop QCD beta-function and anomalous dimensions. *Nucl. Phys.*, B710:485–498, 2005.

[65] K. G. Chetyrkin, J. H. Kuhn, P. Mastrolia, and C. Sturm. Heavy-quark vacuum polarization: First two moments of the $O(\alpha_s^3 n_f^2)$ contribution. *Eur. Phys. J.*, C40:361–366, 2005.

[66] J. H. Kuhn and M. Steinhauser. Determination of $\alpha(s)$ and heavy quark masses from recent measurements of $r(s)$. *Nucl. Phys.*, B619:588–602, 2001.

[67] S. Bethke. $\alpha(s)$ at Zinnowitz 2004. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 135:345–352, 2004.

[68] A. D. Martin, J. Outhwaite, and M. G. Ryskin. Improving $\alpha_{QED}(m_z^2)$ and the charm mass by analytic continuation. *Eur. Phys. J.*, C19:681–691, 2001.

[69] J. H. Kuhn, A. A. Penin, and A. A. Pivovarov. Coulomb resummation for b anti-b system near threshold and precision determination of $alpha(s)$ and m_b. *Nucl. Phys.*, B534:356–370, 1998.

[70] K. G. Chetyrkin, J. H. Kuhn, and M. Steinhauser. RunDec: A Mathematica package for running and decoupling of the strong coupling and quark masses. *Comput. Phys. Commun.*, 133:43–65, 2000.

[71] A. H. Hoang, M. Jezabek, J. H. Kuhn, and T. Teubner. Radiation of heavy quarks. *Phys. Lett.*, B338:330–335, 1994.

[72] K. G. Chetyrkin, A. H. Hoang, J. H. Kuhn, M. Steinhauser, and T. Teubner. Double bubble corrections to heavy quark production. *Phys. Lett.*, B384:233–240, 1996.

[73] J.H. Kuhn and M. Steinhauser. A theory driven analysis of the effective QED coupling at M_Z. *Phys. Lett.*, B437:425–431, 1998.

[74] A. H. Hoang and A. V. Manohar. Charm quark mass from inclusive semileptonic B decays. *Phys. Lett.*, B633:526–532, 2006.

[75] A. Dougall, C. M. Maynard, and C. McNeile. The effect of sea quarks on the mass of the charm quark from lattice QCD. *JHEP*, 01:171, 2006.

[76] J. Rolf and S. Sint. A precise determination of the charm quark's mass in quenched QCD. *JHEP*, 12:007, 2002.

[77] G. M. de Divitiis, M. Guagnelli, R. Petronzio, N. Tantalo, and F. Palombi. Heavy quark masses in the continuum limit of lattice QCD. *Nucl. Phys.*, B675:309–332, 2003.

[78] J. Bordes, J. Penarrocha, and K. Schilcher. Bottom quark mass and QCD duality. *Phys. Lett.*, B562:81–86, 2003.

[79] G. Corcella and A. H. Hoang. Uncertainties in the ms-bar bottom quark mass from relativistic sum rules. *Phys. Lett.*, B554:133–140, 2003.

[80] C. McNeile, C. Michael, and G. Thompson. An unquenched lattice QCD calculation of the mass of the bottom quark. *Phys. Lett.*, B600:77–82, 2004.

[81] G. S. Bali and A. Pineda. QCD phenomenology of static sources and gluonic excitations at short distances. *Phys. Rev.*, D69:094001, 2004.

[82] J. Heitger and R. Sommer. Non-perturbative heavy quark effective theory. *JHEP*, 02:022, 2004.

[83] A. Freitas, M. Awramik, and M. Czakon. Indirect determination of the Higgs mass through electroweak radiative corrections. 2005.

[84] M. Steinhauser. Leptonic contribution to the effective electromagnetic coupling constant up to three loops. *Phys. Lett.*, B429:158–161, 1998.

[85] J. Fleischer and O. V. Tarasov. Calculation of feynman diagrams from their small momentum expansion. *Z. Phys.*, C64:413–426, 1994.

[86] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, and D. Sorensen. *LAPACK Users' Guide*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, third edition, 1999.

[87] T. van Ritbergen, J. A. M. Vermaseren, and S. A. Larin. The four-loop beta function in quantum chromodynamics. *Phys. Lett.*, B400:379–384, 1997.

[88] J. A. M. Vermaseren, S. A. Larin, and T. van Ritbergen. The 4-loop quark mass anomalous dimension and the invariant quark mass. *Phys. Lett.*, B405:327–333, 1997.

Danksagung

Viele Menschen haben zu dem Gelingen dieser Arbeit beigetragen und ich möchte an dieser Stelle allen danken, die mich während des Studiums aber vor allem auch in der Phase der Diplomarbeit inspiriert, unterstützt und begleitet haben.

Mein großer Dank richtet sich an Dr. M. Czakon zum Einen für die interessante und herausfordernde Aufgabenstellung, zahlreiche erhellende Diskussionen und die mir entgegengebrachte besondere Förderung, zum Anderen für die Aufnahme in seiner durch den Sofja-Kovalevskaja-Preis geförderten Forschungsgruppe.

Prof. Dr. R. Rückl danke ich für seine Unterstützung und die Möglichkeit, an seinem Lehrstuhl auf diesem Themengebiet arbeiten zu können.

Ebenfalls möchte ich Radja Boughezal und Grigorios Chachamis für den ergiebigen Dialog, die gute Zusammenarbeit und eine tolle Zeit bei den Konferenzen danken.

Für viele anregende Diskussionen bedanke ich mich bei meinen “Mitbewohnern” Grigorios Chachamis, Matthias Kaminski, Philipp Mertsch, Johannes Rauh, Thomas Reiter und Christian Speckner.

Vielen Dank auch an Brigitte Wehner für die große Hilfe bei organisatorischen und Verwaltungsangelegenheiten.

Ein besonderer Dank geht an meine Eltern, die mich uneingeschränkt gefördert haben, um ein Studium meines Interesses zu ermöglichen.

Meiner Freundin Nina danke ich zutiefst für ihren großen Rückhalt und ihr Verständnis.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Würzburg, den 19. Juli 2006

Thomas Schutzmeier