

$\epsilon$ -Tensor und Drehungen

Betrachten Sie  $\epsilon_{ijk}$ , den total antisymmetrische Tensor dritter Stufe oder das Levi-Civita Symbol, d. h.

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 = -\epsilon_{213} = -\epsilon_{132} = -\epsilon_{321}$$

und alle anderen Komponenten verschwinden. Betrachten Sie das folgende Produkt zweier  $\epsilon$ -Tensoren

$$\forall i, j, i', j' \in \{1, 2, 3\} : \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{i'j'k}$$

Welche Kombinationen von  $i, j, i', j'$  tragen zur Summe bei?

Bestimmen Sie die zwei Terme und stellen Sie das Ergebnis mithilfe von

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

dar.

Die Komponenten der Matrizen für Drehungen um die drei Koordinatenachsen im kartesischen Koordinatensystem  $(x_1, x_2, x_3)$  können wie folgt beschrieben werden:

$$R_{nij}(\theta) = \delta_{ni}\delta_{nj}(1 - \cos \theta) - \epsilon_{ijn} \sin \theta + \delta_{ij} \cos \theta,$$

wobei  $n \in \{1, 2, 3\}$  die Koordinatenachse angibt und  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  die Komponenten der Matrix. Überprüfen Sie dies, indem Sie die drei Matrizen explizit ausrechnen.

Betrachten Sie nun die Drehung um die Drehachse  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$  mit  $|\vec{n}| = 1$  um den Winkel  $\theta$ . Die Komponenten der allgemeinen Drehmatrix können folgendermaßen berechnet werden.

$$R_{ij} = n_i n_j (1 - c_\theta) - \epsilon_{ijk} n_k s_\theta + \delta_{ij} c_\theta.$$

*Für Interessierte: Die allgemeine Drehmatrix für eine Drehung um eine beliebige Achse kann aus den Drehmatrizen, die die Drehung um die Koordinatenachsen beschreiben, berechnet werden. Statt die Rotation um  $\vec{n}$  auszuführen kann die Drehachse mit Hilfe einer Rotation um die  $y$ -Achse und die  $z$ -Achse auf die  $x$ -Achse gelegt werden. Dort rotiert man um die  $x$ -Achse mit dem Winkel  $\theta$ , um im Anschluss die Rotationen um die  $x$ - und die  $z$ -Achse rückgängig zu machen. Nach länglicher Rechnung erhält man die allgemeine Drehmatrix.*

Überprüfen Sie im Indexkalkül, ob für die allgemeine Drehmatrix gilt:  $R^T R = \mathbf{1}$ . Berechnen Sie zunächst:

$$\sum_{k,m=1}^3 \epsilon_{ikm} n_k n_m$$

Zeigen Sie mit Hilfe von  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$  und  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ , dass bei zwei aufeinanderfolgenden Drehungen um dieselbe Achse  $\vec{n}$  gilt:

$$[R(\theta)R(\theta')]_{ij} = [R(\theta + \theta')]_{ij}$$

Wer immer noch nicht genug hat, kann im Indexkalkül zeigen, dass die Determinante der allgemeinen Drehmatrix 1 ist.

Tipp:

$$\det R = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} R_{1i} R_{2j} R_{3k}$$