Gesamtpunktzahl: *22 Punkte*

Aufgabe 1: Homogene Differentialgleichung 2. Ordnung (*4 Punkte*)

Gegeben sei folgende lineare, homogene Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$y'' + 6y' + 9y = 0. \tag{1}$$

Vergewissern Sie sich, dass die Diskriminante der Lösung der charakteristischen Gleichung für diese DGL verschwindet. Zeigen Sie, dass die Funktionen $y_1 = e^{-3x}$ und $y_2 = xe^{-3x}$ die DGL lösen und ein Fundamentalsystem der DGL bilden. Geben Sie die allgemeine Lösung an.

Aufgabe 2: Gedämpfte Schwingungen (*4 Punkte*)

Die Lösungen der Schwingungsgleichung

$$\ddot{y} + 2b\dot{y} + 16y = 0 \tag{2}$$

hängen noch vom Parameter b ab.

a) (*2 Punkte*) Für welche Werte von b erhalten Sie eine schwach bzw. stark gedämpfte Schwingung?

b) (*2 Punkte*) Wie lautet die Lösung der Gleichung im aperiodischen Grenzfall für die Angfangswerte $y(0) = 1$ und $\dot{y}(0) = -1$?
Skizzieren Sie auch den zeitlichen Verlauf der Bewegung.

Aufgabe 3: Inhomogene Differentialgleichungen 2. Ordnung (*6 Punkte*)

Finden Sie die allgemeinen Lösungen der nachfolgenden inhomogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung.

a) (*2 Punkte*)

$$y'' + 4y' + 8y = 4x^2 - 36x - 11 \tag{3}$$

b) (*2 Punkte*)

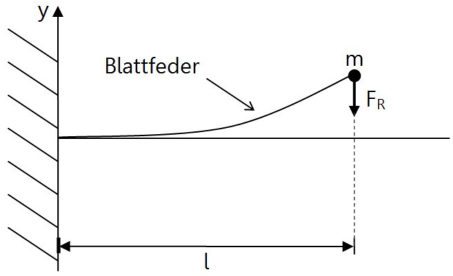
$$y'' + 4y = 4\sin(2x) \tag{4}$$

c) (*2 Punkte*)

$$y'' + 2y' - 8y = 4e^{2x} + 4x + 7 \tag{5}$$

Aufgabe 4: Schwingung einer Blattfeder (*4 Punkte*)

Eine Masse m ist am freien Ende einer einseitig fest eingespannten elastischen Blattfeder der Länge l befestigt. Durch Auslenken wird die Feder in Biegeschwingungen versetzt. Beschreibt a die Biegesteifigkeit der Feder, so kann man die Rückstellkraft F_R als Funktion der Auslenkung y der Masse durch folgenden Zusammenhang beschreiben:



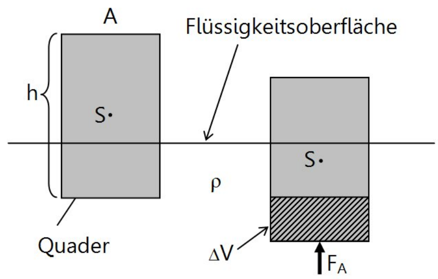
$$F_R = -\frac{3a}{l^3}y. \tag{6}$$

a) (*1 Punkte*) Stellen Sie unter Vernachlässigung möglicher Reibungseffekte und der Gravitationskraft die DGL der Bewegung mit Hilfe des 2. Newtonschen Gesetzes auf.

b) (*3 Punkte*) Lösen Sie die DGL für die Anfangswerte $y(0) = y_0$ und $\dot{y}(0) = 0$. Bestimmen Sie die Schwingungsdauer und skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Bewegung.

Aufgabe 5: Schwingung eines Quaders in einer Flüssigkeit (*4 Punkte*)

Ein homogener Quader der Masse m, Querschnittsfläche A und Höhe h taucht in eine Flüssigkeit der Dicht ρ zu einem Drittel ein. Zur Zeit $t = 0$ wird der Körper kurz mit der Geschwindigkeit v_0 senkrecht nach unten angestoßen. Er schwingt nun um die Gleichgewichtslage.



a) (*1 Punkte*) Stellen Sie die DGL der Bewegung des Schwerpunktes in geeigneten Koordinaten auf, wobei die Rückstellkraft durch die Auftriebskraft $F_A = -\rho g \Delta V$ und die schwache Reibungskraft durch $F_R = -kv$ gegeben ist. Bestimmen Sie die Anfangsbedingungen.

b) (*3 Punkte*) Lösen Sie die DGL und bestimmen Sie die Anfangsgeschwindigkeit des Quaders, so dass er beim folgenden Eintauchen komplett im Wasser untertaucht.